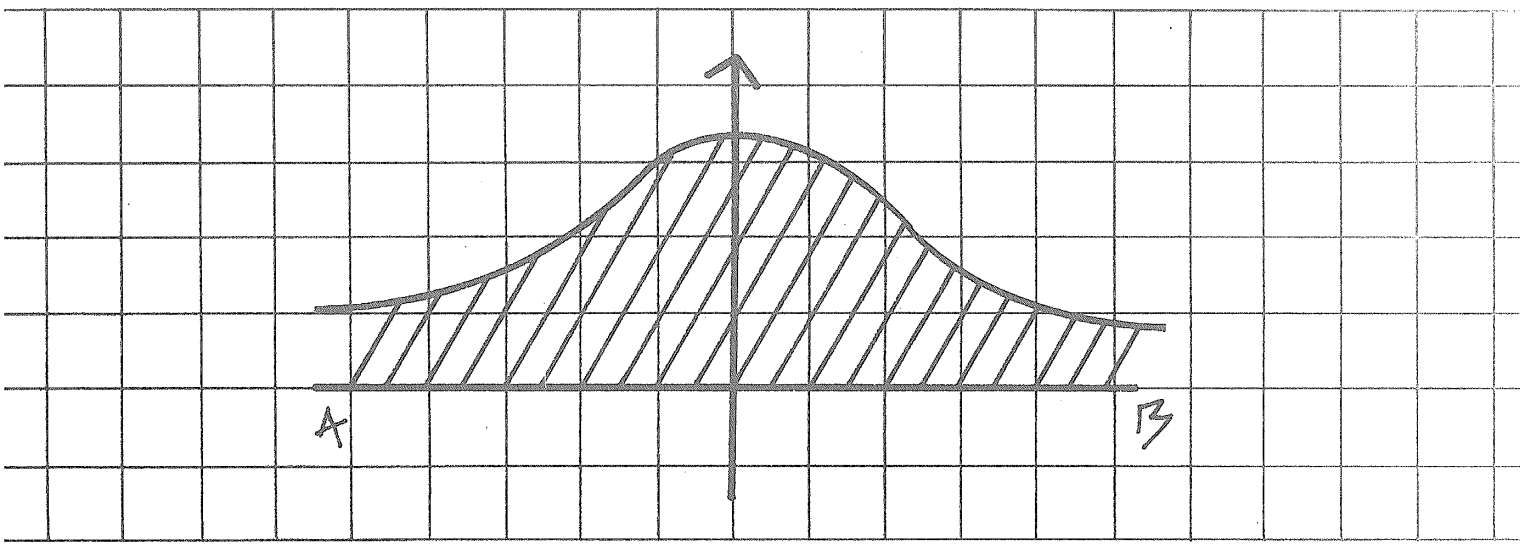
LA INTEGRAL DEFINIDA Y LA INTEGRAL INDEFINIDA

Obras que integran el bloque 8 *(Cálculo integral):*

1· Sumatoria y notación
2· ***La integral definida y la integral indefinida***
3· Integrales elementales
4· Métodos de integración 1
5· Métodos de integración 2
6· Algunas aplicaciones del cálculo integral

ANUIES

Asociación Nacional
de Universidades e Institutos de
Enseñanza Superior



Módulos de matemáticas

Bloque 8
Cálculo integral

Módulo 2

LA INTEGRAL DEFINIDA Y LA INTEGRAL INDEFINIDA

Conrado Flores García

EDITORIAL TRILLAS

México, Argentina, Colombia, España
Puerto Rico, Venezuela

Esta obra se terminó de imprimir
el día 28 de septiembre de 1984,
en los talleres de Litográfica Ingramex, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 1, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se encuadernó en Ediciones Pegaso, S. A.,
Centeno núm. 162, loc. 4, Col. Granjas Esmeralda,
Deleg. Iztapalapa, 09810, México, D. F.,
se tiraron
3 000 ejemplares, más sobrantes de reposición

CO EV KC 100

La presentación y disposición en conjunto de
LA INTEGRAL DEFINIDA Y LA INTEGRAL INDEFINIDA
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o trasmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor

Derechos reservados
© 1984, Editorial Trillas, S. A. de C. V.
Av. Río Churubusco 385, Col. Pedro María Anaya
Deleg. Benito Juárez, 03340, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Reg. núm. 158

Primera edición, septiembre 1984
ISBN 968-24-1433-4

Impreso en México

PRESENTACIÓN

Descripción general de la serie

Para la elaboración de los textos que componen la serie MÓDULOS DE MATEMÁTICAS se tomaron en cuenta los objetivos de los programas de estudio de un gran número de instituciones de enseñanza media superior.

La serie consta de 64 módulos didácticos agrupados en 8 bloques, a saber:

1. Álgebra. Estructuras y operaciones.
2. Álgebra. Modelos.
3. Nociones de lógica matemática.
4. Geometría euclidiana.
5. Trigonometría.
6. Geometría analítica.
7. Cálculo diferencial.
8. Cálculo integral.

Cada bloque se complementa con un compendio de la información contenida en los módulos didácticos que lo forman y al cual hemos dado el nombre de MEMO, ya que es una ayuda a la *memo*ria, al entusiasmo y al esfuerzo.

Por otra parte, cada módulo contiene una sucesión de cuadros de aprendizaje, los cuales están organizados en cierto número de submódulos (capítulos); en los que se presenta la información en orden creciente de complejidad. En atención a su fin, hemos designado a los cuadros con los nombres: *informativos, de pregunta* y *de respuesta.* Asimismo, se presentan cuadros complementarios para efectuar, si es necesario, ejercicios o prácticas adicionales.

Sugerencias a los lectores

Los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS están dirigidos a diferentes clases de lectores: los profesores de enseñanza media superior, los estudiantes inscritos en cursos escolarizados de este nivel, estudiantes autodidactas y, en general, personas que deseen actualizar sus conocimientos en este campo.

En lo que respecta a los profesores, éstos pueden usar los módulos como parte integrante de sus guiones de clase; para tal efecto, deben revisar el programa correspondiente y advertir en qué parte puede incorporarse tal o cual módulo, ya que los textos están basados en un gran número de programas y no en uno solo. Al seleccionar los módulos que correspondan al curso planeado, éste quedará dividido en tareas de aprendizaje. El dominio de cada módulo quedará determinado por la consecución de los objetivos específicos.

En relación con los estudiantes inscritos en cursos escolarizados, los MÓDULOS DE MATEMÁTICAS pueden servirles como material complementario y como una posibilidad de desarrollar los ejercicios que se revisan en el aula.

Los estudiantes autodidactas notarán que cada uno de los textos es un "escalón numerado" que debe seguirse con precisión para poder acceder al siguiente. Los cuadros informativos, los de pregunta y los de respuesta son las partes fundamentales de cada peldaño. En los cuadros informativos se presentan los aspectos que deben ser estudiados con sumo cuidado. Dichos cuadros se destacan con el símbolo , el cual indica que se les debe prestar atención especial. Los cuadros de pregunta brindan el espacio suficiente para anotar la respuesta correspondiente, la cual puede ser verificada en los cuadros de respuesta que están situados justo al lado del cuadro de pregunta (para tal efecto, es conveniente tapar el cuadro de respuesta durante la elaboración de la misma, a fin de poder comprobar el resultado que se obtenga).

El alumno logrará el dominio de cada uno de los módulos mediante la consecución de los objetivos anotados al final de cada submódulo. Dichos objetivos indican lo que el estudiante debe ser capaz de hacer al terminar de examinar cada etapa: sólo si se han cumplido los objetivos deberá pasarse al siguiente módulo.

Respecto a las personas que quieren actualizar sus conocimientos en el campo de las matemáticas, es necesario que estudien los módulos desde el comienzo (a manera de repaso), ya que de esta manera se evitará que algún tema quede poco claro debido a la falta de conocimiento de aquéllos que lo fundamentan. Para ello, se ha incluido una lista de prerrequisitos que deben cumplirse para poder entender determinados temas.

Cabe señalar que la mencionada lista de prerrequisitos, comprende aquellos puntos que son útiles para todos los tipos de lectores, pues se especifican los conocimientos que deben tenerse para poder comprender y asimilar mejor el contenido del módulo en cuestión.

Una última observación: las metas sólo se logran cuando el esfuerzo por alcanzarlas se fundamenta en el agrado, el entusiasmo y la motivación, en el caso de los alumnos, y en la planeación adecuada y la exposición convincente, en lo que respecta a los profesores.

CONRADO FLORES GARCÍA

ÍNDICE DE CONTENIDO

Presentación

Objetivos, esquema estructural y prerrequisitos

2.1 La integral definida propia y la integral definida impropia

2.2 Teorema de evaluación del cálculo integral

2.3 Antiderivadas de una función

2.4 Constante de integración

2.5 Diferenciales, diferenciación y antidiferenciación

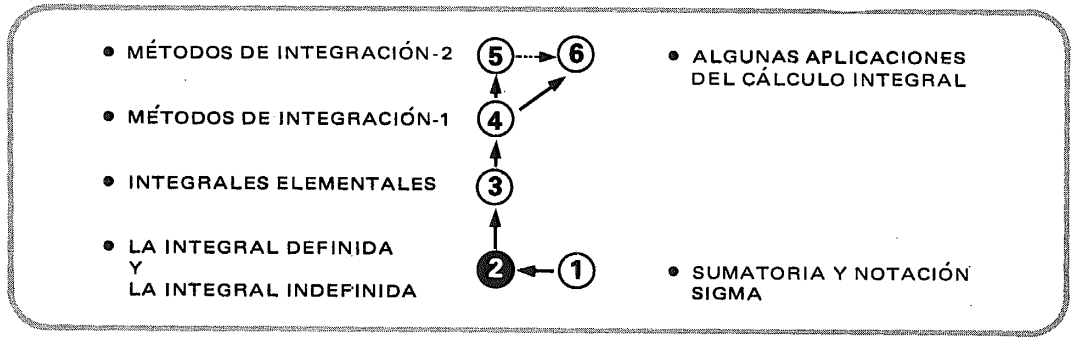
2.6 Evaluación de integrales definidas

OBJETIVOS, ESQUEMA ESTRUCTURAL Y PRERREQUISITOS

Bloque 8. Cálculo integral

Objetivos: integrar algunas funciones algebraicas o trascendentes, y aplicar los procedimientos correspondientes a la resolución de problemas prácticos

Esquema estructural del bloque 8



Módulo 2. La integral definida y la integral indefinida

Objetivos: establecer los conceptos de integral definida, antiderivada e integral indefinida, y evaluar integrales definidas de funciones polinomias

Prerrequisitos:	Bloque	Módulo(s)
• Nociones de la teoría de conjuntos	1	1
• Manejo de expresiones algebraicas		
– enteras	1	7, 8, 9
– racionales	1	11
– reales	1	13
• Conceptos geométricos básicos	4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
• Conceptos trigonométricos básicos	5	1
• Conceptos básicos de la geometría analítica	6	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
• Continuidad y límite de una función	7	2, 3
• Derivación de funciones algebraicas	7	1, 4

2.1

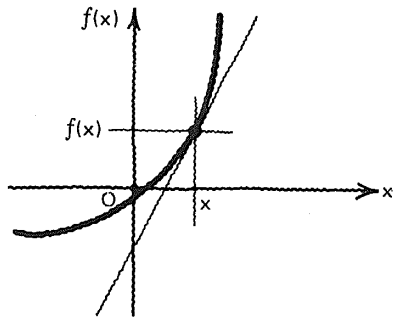
La integral definida propia y la integral definida impropia

1

En la primera etapa de nuestro estudio del **cálculo diferencial** calculábamos la **pendiente de una curva,** en un punto de abscisa x, determinando el **límite** del llamado **cociente de Newton**

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

cuando $\Delta x \to 0$.



2

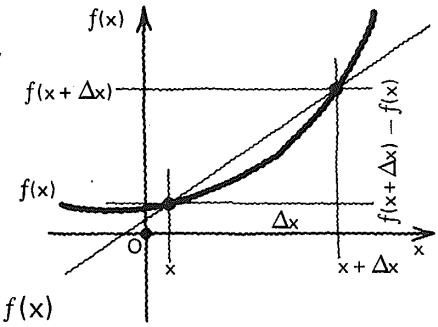
Realizábamos el cálculo en una secuencia de 4 pasos, que a veces resultaba demasiado laboriosa:

Paso 1. $f(x + \Delta x)$

Paso 2. $f(x + \Delta x) - f(x)$

Paso 3. $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Paso 4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$



3

A fin de agilizar el anterior procedimiento empezamos por dar un **nombre** al

límite de este cociente de Newton

e inventar un

símbolo

para representarlo.

4

Llamamos

derivada de $f(x)$ con respecto a x

al límite del cociente

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

cuando Δx tiende a cero, y lo simbolizamos en alguna de estas formas:

- $f'(x)$
- $\frac{d(y)}{dx}$
- $D_x y$
- y'

siendo $y = f(x)$.

5

Tenemos, entonces, que:

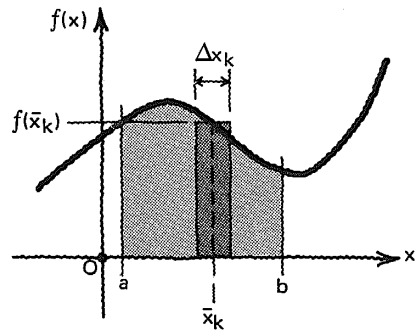
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

6

Ahora, nos hallamos calculando el **área de una región del plano cartesiano** limitada por una curva f, dos rectas verticales y el eje de las x, determinando el límite de una suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k$$

cuando $n \to +\infty$.



7

En nuestro intento de reducir el trabajo necesario para el cálculo de tales áreas, empezaremos por dar un **nombre** al

límite de una suma de Riemann

cuando el número n de subintervalos tiende a $+\infty$. Le llamaremos

integral definida.

8

Simbólicamente:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k$$

- Si tal límite existe

Se lee:

la **integral definidad** de efe de x entre los límites a y b.

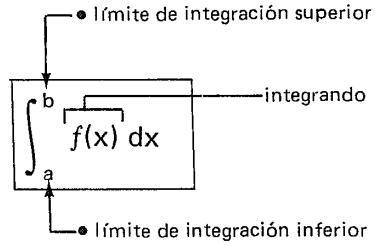
9

Estudiar con atención.

- **El operador "integral"**

está formado de dos partes:

① $\int$ → letra "S" deformada, inicial de la palabra "suma".
② **dx** → Se lee: "diferencial de x", y su significado será explicado más tarde.



$a, b \in \mathbb{R} \wedge a \leqslant b$

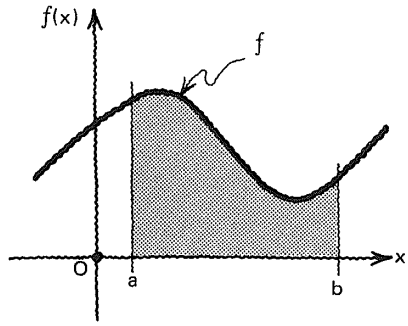
10

La integral definida entre los límites a y b

representada por la expresión:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

será geométricamente interpretada como el área de la región del plano cartesiano limitada por la curva f, las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje de las x.



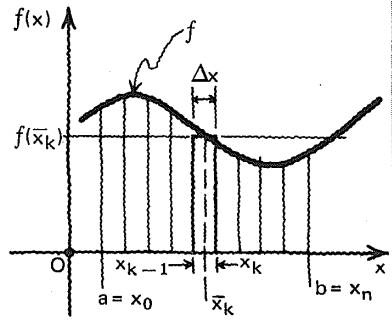
11

Ahora bien, si "partimos" el intervalo [a, b] en n subintervalos de igual longitud (Δx) podemos escribir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to \square} \sum f(\overline{x}_k)\,\Delta x$$

puesto que:

si $n \to +\infty$
$\Delta x \to \square$.



0

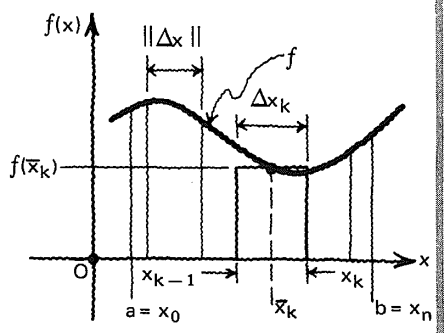
0

12

Si los n subintervalos de la partición del intervalo [a, b] no son de la misma longitud, existe un subintervalo tal que su longitud es mayor o igual a la de cualquier otro. A la longitud de tal subintervalo le llamamos:

norma de la partición

y la denotamos con $\| \Delta x \|$

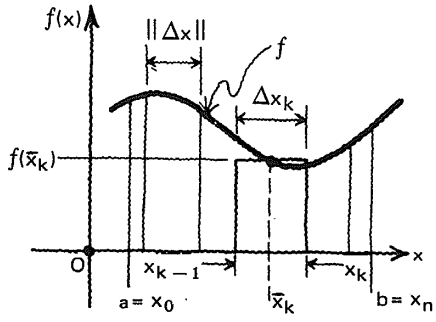


13

Es claro que:

si $\| \Delta x \| \to 0$

todos los demás subintervalos tenderán a ⌴.

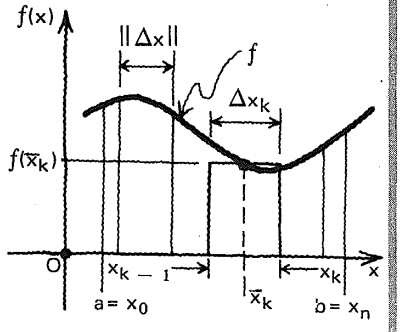


0

14

Por lo tanto, podemos escribir:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underset{\| \Delta x \| \to 0}{\lim} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k$$



$\| \Delta x \| \to 0$

15

Consideremos la expresión:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k$$

Si $\lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k$ existe,

decimos que: la función

f **es integrable**

en el intervalo [a, b].

16

Señalar la opción correcta.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k$$

Si f **es continua** en [a, b]
podemos asegurar que:

$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} (\bar{x}_k)\,\Delta x_k \quad \text{existe}$$

y por lo tanto

f **es/no es** integrable en [a, b].

es

17

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k$$

Si f **no es continua** en [a, b]

no podemos asegurar nada
acerca de la existencia o no
existencia del límite.

18

En otras palabras:

si f es continua en [a, b]

entonces

- $\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\ \Delta x_k$ *existe*

y, por lo tanto:

- *f es integrable en [a, b]*

19

Si f no es continua en [a, b]

entonces

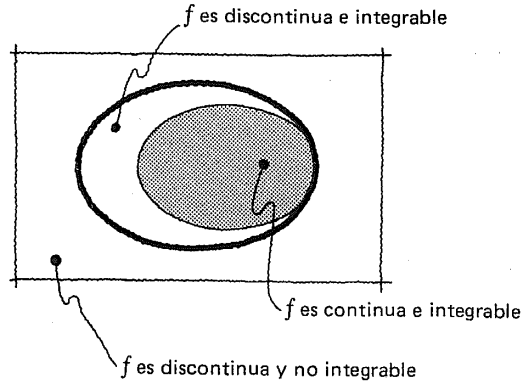
- $\lim_{\|\Delta x\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\ \Delta x_k$ *puede existir o no*

y por lo tanto:

- *f puede ser integrable en [a, b] o no serlo*

20

Para una función f en un cierto intervalo [a, b], puede ocurrir alguna de las 3 situaciones indicadas en este diagrama:



21

Señalar la opción correcta con ayuda del diagrama del cuadro anterior.

Toda función continua en [a, b] es integrable en [a, b].

V / F

V

Ninguna función discontinua en [a, b] es integrable en [a, b].

V / F

F

22

Señalar la opción correcta.

Algunas funciones integrables en [a, b] son continuas en [a, b].

V / F

V

Algunas funciones integrables en [a, b] son discontinuas en [a, b].

V / F

V

23

Intentemos identificar, a través de sus gráficas, las funciones que son:

① continuas e integrables

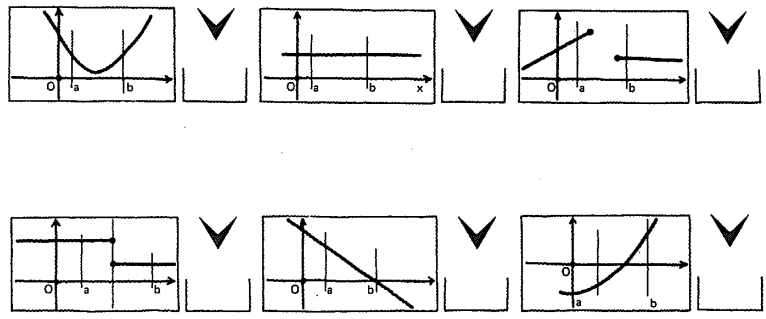
② discontinuas e integrables

③ discontinuas y no integrables

en el intervalo indicado.

(Ver cuadro siguiente.)

24



1 1 3

2 1 1

25

INTEGRAL PROPIA •

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k$$

Si f es continua en [a, b]:

- la expresión $\int_a^b f(x)dx$

representará a lo que llamaremos la

"integral propia" de $f(x)$ de **a** a **b.**

26

INTEGRAL IMPROPIA •

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k$$

Si f es discontinua en [a, b] y

$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k \quad \text{existe}$$

- la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$

representará lo que definiremos como
la **integral impropia** de $f(x)$ de **a** a **b.**

27

EXPRESIÓN SIN SIGNIFICADO

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k$$

Si f es discontinua y

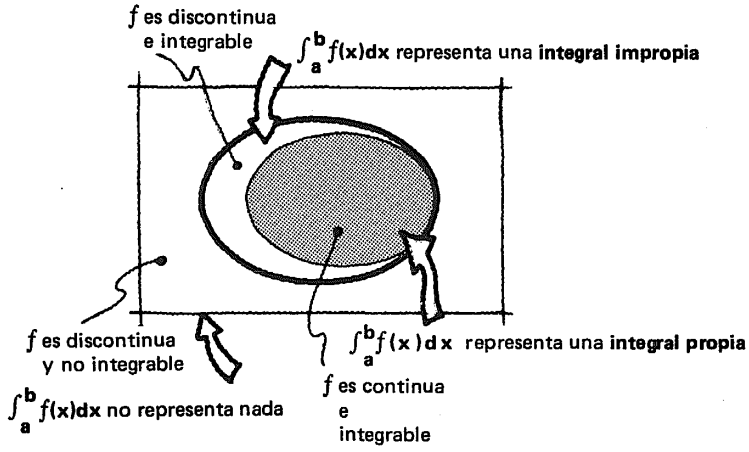
$$\lim_{\|\Delta x\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k \text{ no existe}$$

la expresión $\int_a^b f(x)\,dx$

no tiene ningún significado.

28

En un cierto intervalo [a, b]



29

En las siguientes secciones las

integrales

consideradas serán

propias.

Al final del módulo estudiaremos algunas

integrales impropias

8.2.1

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* las definiciones de integral definida propia e integral definida impropia, como el límite de una suma de Riemann, cuando la norma de la partición tiende a cero;
- *explicar* el significado geométrico de la integral definida.

2.2

Teorema de evaluación del cálculo integral

30

Se requiere evaluar

$$\int_0^4 5\,dx$$

a partir de la definición de integral definida y apoyándonos en su significado geométrico.

31

$$\int_0^4 5\,dx = ?$$

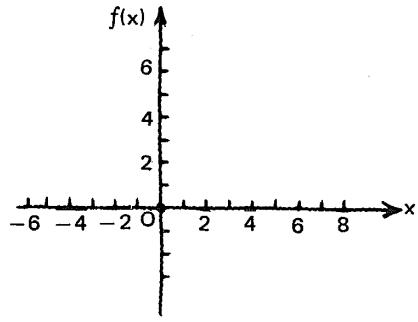
Empecemos por escribir la función involucrada en la integral:

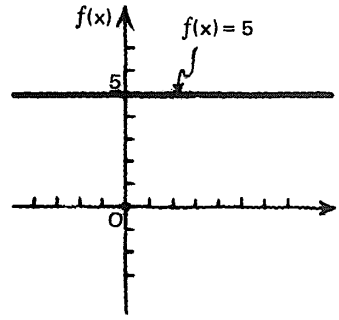
$f(x) =$ [ ]

5

32

Tracemos la gráfica correspondiente a $f(x) = 5$

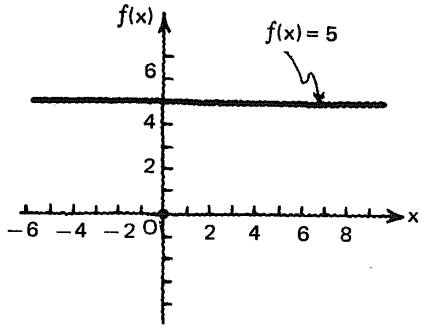


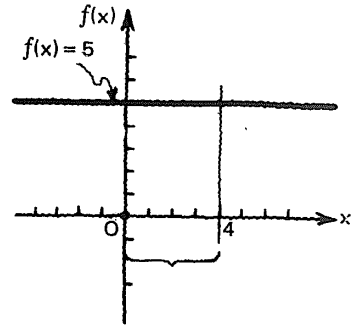


33

$\int_0^4 5\,dx = ?$

Señalemos gráficamente el intervalo considerado en la integral.

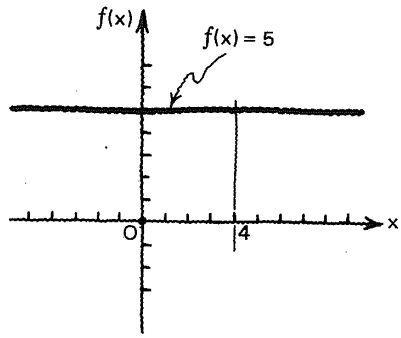


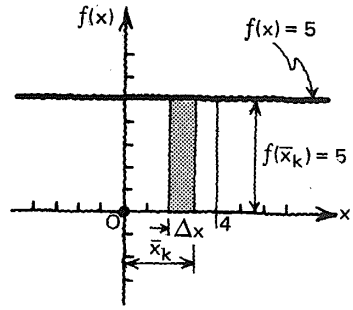


34

$\int_0^4 5\,dx = \lim$

Suma de Riemann equivalente considerando n subintervalos de la misma longitud (Δx).





- $\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} 5\,\Delta x$

35

$$\int_0^4 5\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} 5\,\Delta x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \square$$

Expresión en términos de n

$\frac{20}{n}$

puesto que $\Delta x = \frac{4}{n}$

36

$$\int_0^4 5\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{20}{n} = \square$$

Evaluación del límite del segundo miembro.

20

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 20$$

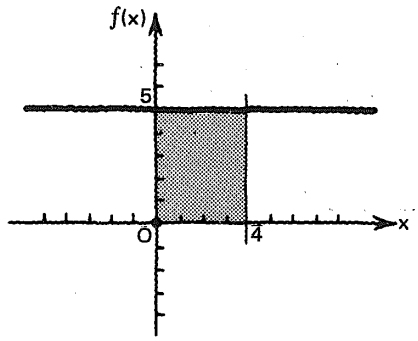
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \cdot 20n$$

$$\lim_{n \to +\infty} 20 = 20$$

37

Escribimos, entonces:

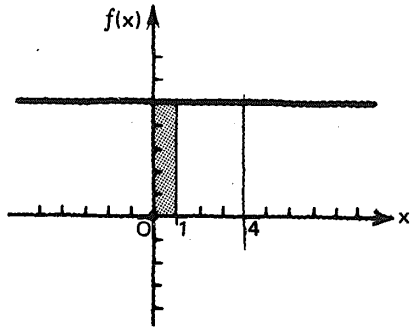
$$\int_0^4 5\,dx = 20$$



38

Similarmente, podemos escribir:

$$\int_0^1 5\,dx = \square$$

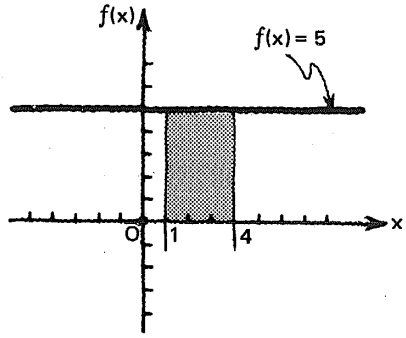


5

39

E:

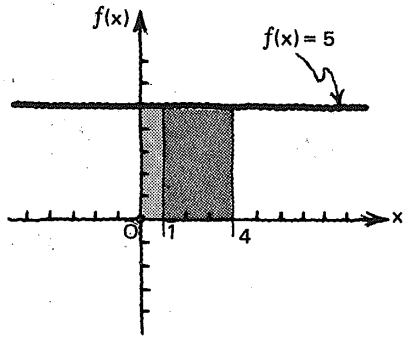
$$\int_1^4 5\,dx = \int_0^4 5\,dx - \int_0^1 5\,dx$$
$$= 20 - 5 = 15$$



40

O bien:

$$\int_0^4 5\,dx = \square + \square$$
$$= \square$$



$$\int_0^1 5\,dx + \int_1^4 5\,dx$$

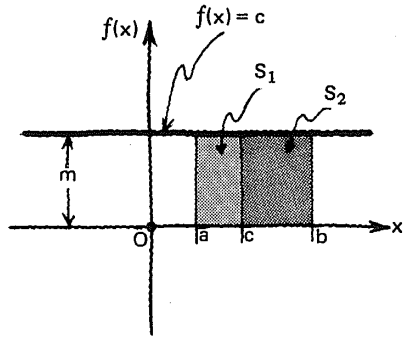
$5 + 15 = 20$

41

Atención.

Vamos a generalizar esto.

Puesto que:
$S = S_1 + S_2$
podemos escribir:



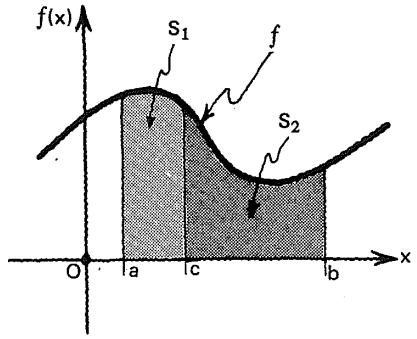
$$\int_a^b m\,dx = \int_a^c m\,dx + \int_c^b m\,dx$$

42

Y en forma más general

puesto que:

$S = S_1 + S_2$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

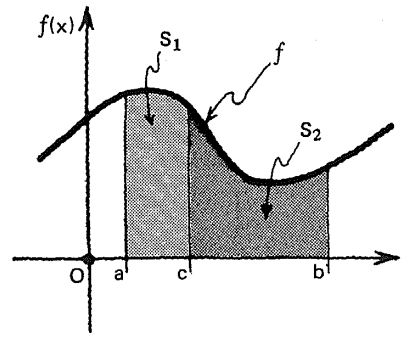
43

Tomemos nota de esta importante propiedad de las integrales definidas:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

$c \in [a, b]$

Puede demostrarse que esto se cumple $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{R}$ sin importar el orden.



44

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

De aquí podemos deducir:

$$\int_a^c f(x)\,dx = \boxed{\qquad\qquad}$$

o

$$\int_c^b f(x)\,dx = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$$

45

Ahora, necesitamos determinar el valor numérico de la integral:

$$\int_0^5 2x\,dx$$

46

$$\int_0^5 2x\,dx = ?$$

La función f involucrada es

$$\boxed{\qquad}$$

$f(x) = 2x$

47

$$\int_0^5 2x\,dx = \boxed{}$$

por la definición
de integral definida

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k$$

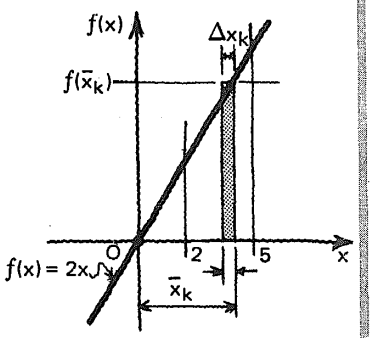
48

$$\int_0^5 2x\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k$$

Gráfica auxiliar

Si consideramos n
rectángulos circunscritos
de igual base:

$\Delta x_k = \boxed{}$



$$\Delta x_k = \frac{5-0}{n} = \frac{5}{n}$$

49

$$\int_0^5 2x\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k$$

$\Delta x_k = \frac{5}{n}$

$\bar{x}_k = \boxed{}$

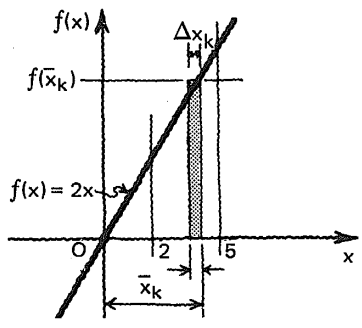
$f(\bar{x}_k) = \boxed{}$

$f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k = \boxed{}$

$\sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k = \boxed{}$

expresión simplificada en términos de n.

$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{x}_k)\,\Delta x_k = \boxed{} = \boxed{}$



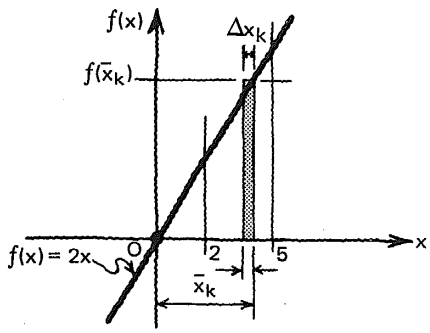
Respuesta
en el
cuadro siguiente.

- $\frac{5k}{n}$
- $f\left(\frac{5k}{n}\right) = 2\left(\frac{5k}{n}\right) = \frac{10k}{n}$
- $\frac{10k}{n} \cdot \frac{5}{n} = \frac{50k}{n^2}$
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{50k}{n^2} = \frac{50}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{50}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 25\,\frac{n^2+n}{n^2} = 25 + \frac{25}{n}$
- $\lim_{n \to +\infty} \left(25 + \frac{25}{n}\right) = 25$

50

$$\int_0^5 2x\,dx = 25$$

Geométricamente:



S = [_____] = [_____]

$\frac{5 \times 10}{2} = \frac{50}{2} = 25$

51

Este procedimiento para
la evaluación de integrales
se nos antoja demasiado laborioso.
En nuestro intento de encontrar
alguna forma de agilizarlo,
vamos a evaluar algunas integrales,
observando cuidadosamente
los resultados.

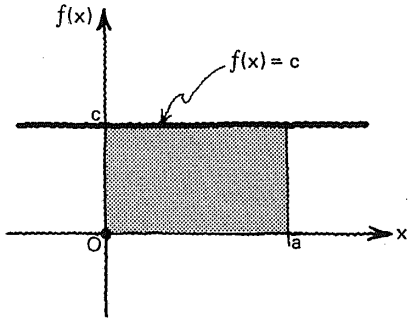
52

Sea la

función constante
$f(x) = c$

y el intervalo [0, a].
Escribamos,
por la simple inspección
de la figura
el resultado de
la integral:

$$\int_0^a c\,dx = \square$$



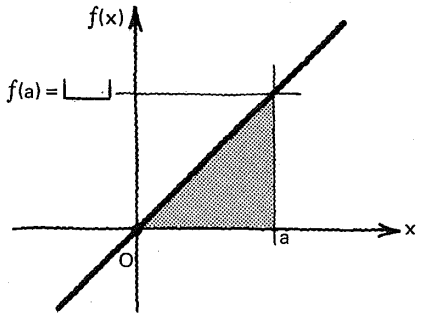
c • a

Sea la

función identidad
$f(x) = x$

y el
intervalo [0, a].

$$\int_0^a x\,dx = \square$$



a

$$\frac{a \cdot f(a)}{2} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$$

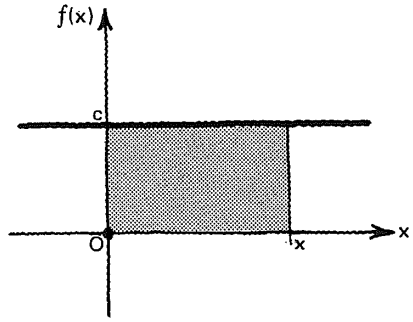
54

Ahora,
permítasenos
considerar
la función constante

$f(x) = c$

y el intervalo [0, x]

$$\int_0^x c\,dx = \square$$



c • x

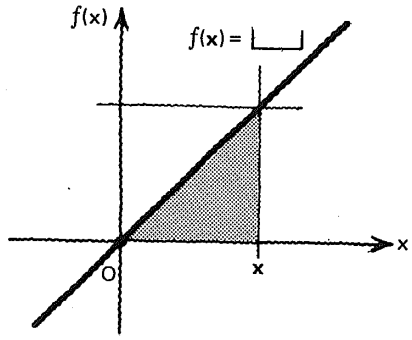
55

La función identidad:

$f(x) = x$

y el intervalo [0, x]

$$\int_0^x x\,dx = \square$$



x

$$\frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$$

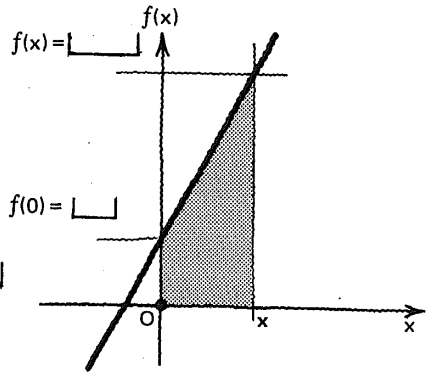
56

La función lineal

$f(x) = 2x + 3$

y el intervalo [0, x].

$$\int_0^x (2x + 3)\,dx = \square$$



- $2x + 3$
- 3

Para un trapecio:

$$S = \frac{f(0) + f(x)}{2} \cdot x$$

$$S = \frac{(3 + 2x + 3)\,x}{2}$$

$$S = \frac{2x^2 + 6x}{2}$$

- $x^2 + 3x$

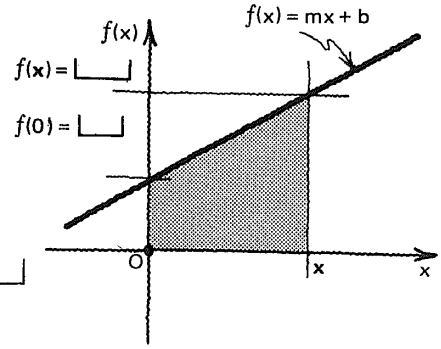
57

La función lineal

$f(x) = mx + b$

y el intervalo [0, x]:

$$\int_0^x (mx + b)\,dx = \square$$



mx + b

b

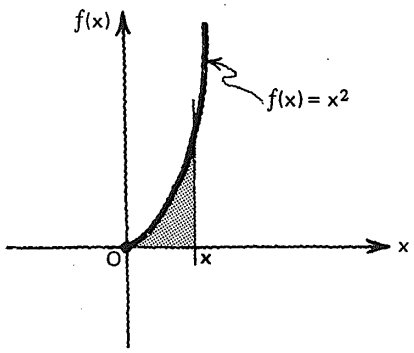
$$S = \frac{(mx + b + b)x}{2}$$

$$\frac{mx^2}{2} + bx$$

58

La función cuadrática
$f(x) = x^2$
y el intervalo [0, x].
Ante la dificultad de calcular el área indicada por procedimientos geométricos, partiremos de la definición de integral definida:

$$\int_0^x x^2\,dx = \boxed{\qquad\qquad}$$



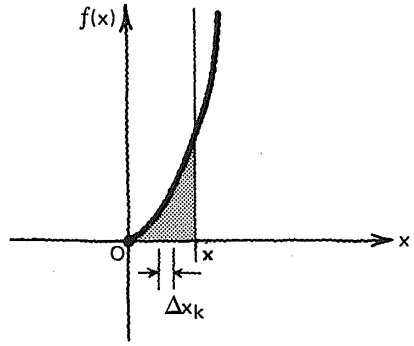
$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k$$

59

$$\int_0^x x^2\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k$$

Considerando una partición regular del intervalo [0, x] en n subintervalos de la misma longitud, tenemos:

$\Delta x_k = \boxed{\quad}$



$\frac{x}{n}$

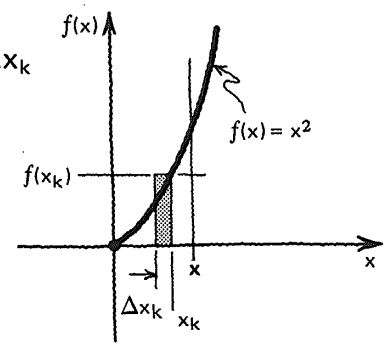
60

$$\int_0^x x^2\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k$$

Si los rectángulos son considerados como circunscritos en la curva f:

$\overline{x}_k = \boxed{\qquad\qquad}$

$f(\overline{x}_k) = \boxed{\qquad\qquad}$



$\frac{kx}{n}$

$f(\frac{kx}{n}) = (\frac{kx}{n})^2$

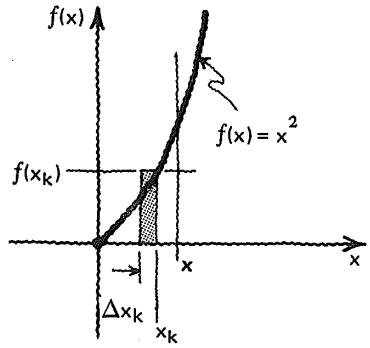
61

$$\int_0^x x^2\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k$$

$$\Delta x_k = \frac{x}{n}$$

$$f(\overline{x}_k) = \left(\frac{kx}{n}\right)^2$$

$f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k =$ ____



$$\frac{x}{n}\left(\frac{kx}{n}\right)^2 = \frac{x^3\,k^2}{n^3}$$

62

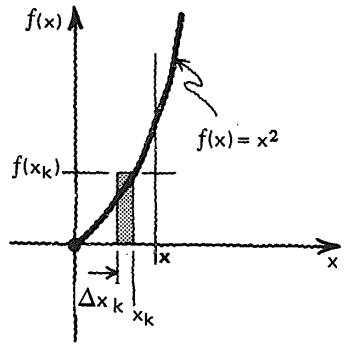
$$\int_0^x x^2\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k =$$ ____

$=$ ____

$=$ ____

Expresión simplificada en términos de n.



$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^3}{n^3}\,k^2 = \frac{x^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$\frac{x^3}{n^3} \cdot \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

$$\frac{x^3}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

63

$$\int_0^x x^2\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k$$

$$\int_0^x x^2\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^3}{6}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

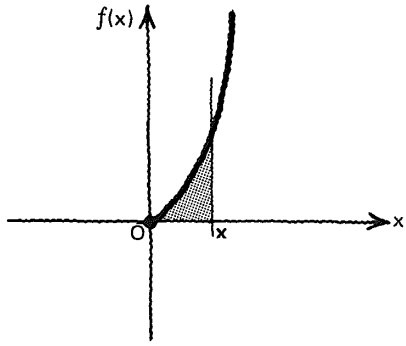
$=$ ____

$$\frac{x^3}{3}$$

64

La función cúbica
$f(x) = x^3$
y el intervalo [0, x].
Por la definición
de integral definida:

$$\int_0^x x^3\,dx = \square$$



$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k$$

65

$$\int_0^x x^3\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k$$

Para n rectángulos circunscritos en la curva:

$\Delta x_k = \square$

$\overline{x}_k = \square$

$f(\overline{x}_k) = \square$

$\frac{x}{n}$

$\frac{kx}{n}$

$\left(\frac{kx}{n}\right)^3$

66

$$\int_0^x x^3\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k$$

$f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k = \square$

$$\sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k = \square$$

$= \square$

Expresión simplificada en términos de n.

$$\frac{x}{n} \cdot \left(\frac{kx}{n}\right)^3 = \frac{x^4}{n^4} \cdot k^3$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^4}{n^4} \cdot k^3 = \frac{x^4}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$= \frac{x^4}{n^4} \cdot \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\frac{x^4}{4}\left[1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}\right]$$

67

$$\int_0^x x^3\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\overline{x}_k)\,\Delta x_k$$

$$\int_0^x x^3\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^4}{4}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= \frac{x^4}{4}$$

68

Hemos obtenido algunas fórmulas para evaluar integrales definidas.

1. $\int_0^x c\,dx = cx$
2. $\int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2}$
3. $\int_0^x (2x+3)\,dx = x^2 + 3x$
4. $\int_0^x (mx+b)\,dx = \frac{mx^2}{2} + bx$
5. $\int_0^x x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$
6. $\int_0^x x^3\,dx = \frac{x^4}{4}$

69

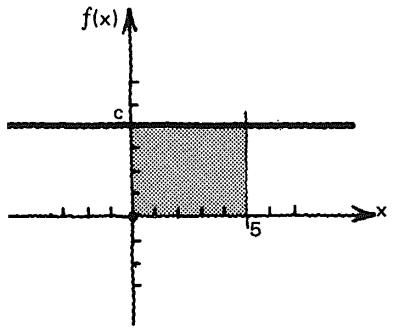
1. $\int_0^x c\,dx = cx$

Si sustituimos para **x** cualquier número real mayor que o igual a cero, obtenemos el área de la región limitada por la curva $f(x) = c$, las rectas $x = 0$, $x = x$ e $y = 0$.

70

Por ejemplo:
para $x = 5$
tenemos:

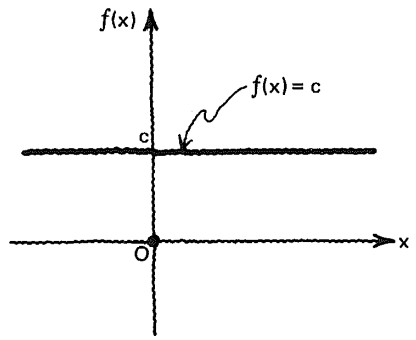
$$\int_0^5 c\,dx = c \cdot 5 = 5c$$



71

$$\int_0^x c\,dx = cx$$

Para $x = 0$



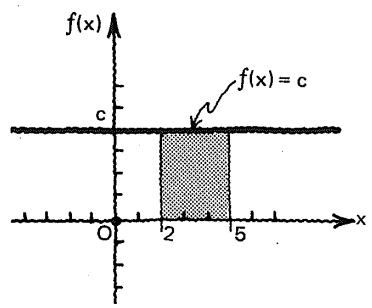
$$\int_0^0 c\,dx = c \cdot 0 = 0$$

72

$$\int_0^x c\,dx = cx$$

Ahora,
supongamos
que nos interesa
conocer
el área de la región
limitada por f,
las rectas $x = 2$,
$x = 5$ e $y = 0$.
Por la propiedad que
hemos estudiado antes:

$$\int_2^5 c\,dx = \square - \square$$



$$\int_0^5 c\,dx - \int_0^2 c\,dx$$

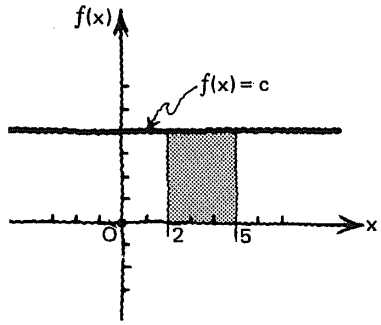
73

$$\int_0^x c\,dx = cx$$

$$\int_0^5 c\,dx = \underline{\qquad}$$

$$\int_0^2 c\,dx = \underline{\qquad}$$

$$\int_2^5 c\,dx = \underline{\qquad}$$



5c

2c

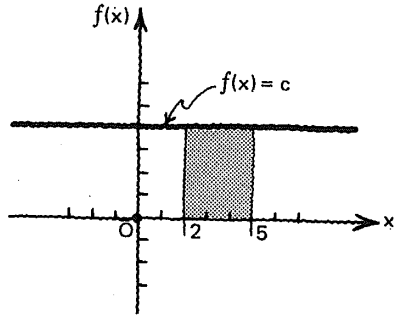
5c − 2c = 3c

74

$$\int_0^x c\,dx = cx$$

Observemos con atención este resultado:

$$\int_2^5 c\,dx = c\,(5) - c\,(2)$$



75

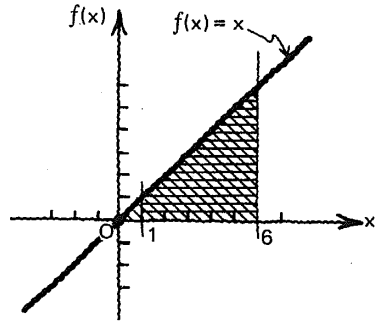
Tomemos, ahora, la fórmula 2 de nuestra lista del cuadro 68.

$$\int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$\int_0^6 x\,dx = \underline{\qquad}$$

$$\int_0^1 x\,dx = \underline{\qquad}$$

$$\int_1^6 x\,dx = \underline{\qquad}$$



- $\frac{(6)^2}{2} = 18$
- $\frac{(1)^2}{2} = \frac{1}{2}$
- $\frac{(6)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2} = 18 - \frac{1}{2} = \frac{35}{2}$

(Este resultado puede ser verificado geométricamente.)

76

$$\int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

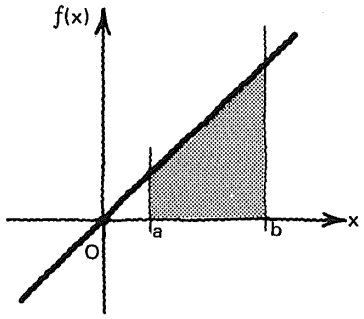
Para $a < b$

$$\int_0^b x\,dx = \boxed{}$$

$$\int_0^a x\,dx = \boxed{}$$

$$\int_a^b x\,dx = \boxed{} = \boxed{}$$

↑ expresión general



- $\frac{b^2}{2}$
- $\frac{a^2}{2}$
- $\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}$

o bien, factorizando el numerador

$$\frac{(b + a)\,(b - a)}{2}$$

↑ expresión geométrica para el área del trapecio

77

$$\int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

Si llamamos:

$$\frac{x^2}{2} = G_2(x)$$

$$\int_0^b x\,dx = G_2(\boxed{})$$

$$\int_0^a x\,dx = G_2(\boxed{})$$

$$\int_a^b x\,dx = \boxed{}$$

b

a

$G_2(b) - G_2(a)$

78

$$\int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

Si $\frac{x^2}{2} = G_2(x)$

$$\int_0^b x\,dx = G_2(b)$$

$$\int_0^a x\,dx = G_2(a)$$

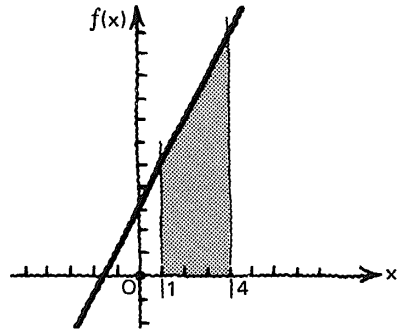
$$\int_a^b x\,dx = G_2(b) - G_2(a)$$

Observemos con atención este resultado y veamos si se cumple para otras de las fórmulas que hemos encontrado.

79

Consideremos la fórmula **3**

$$\int_0^x (2x + 3)\,dx = x^2 + 3x$$



Llamemos: $G_3(x) = x^2 + 3x$

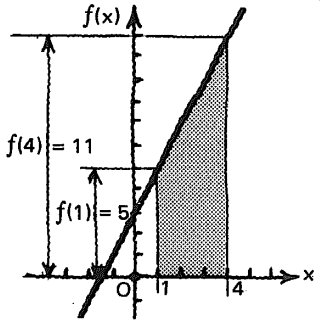
Entonces:

$$\int_0^4 (2x + 3)\,dx = G_3(4) = (4)^2 + 3(4) = 28$$

$$\int_0^1 (2x + 3)\,dx = \square = \square = \square$$

$$\int_1^4 (2x + 3)\,dx = \square - \square = \square$$

Verificar geométricamente los resultados. $\square$



- $G_3(1) = (1)^2 + 3(1) = 4$
- $G_3(4) - G_3(1) = 28 - 4$

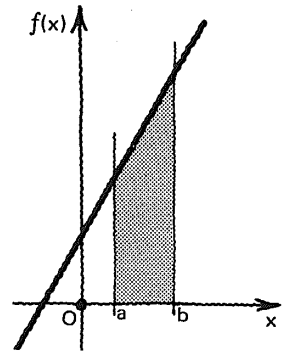
Geométricamente: 24

$$\frac{(11 + 5)3}{2} = 24$$

80

$$\int_0^x (2x + 3)\,dx = x^2 + 3x$$

Si $x^2 + 3x = G_3(x)$



$$\int_0^b (2x + 3)\,dx = \square = \square$$

$$\int_0^a (2x + 3)\,dx = \square = \square$$

$$\int_a^b (2x + 3)\,dx = \square = \square$$

- $G_3(b) = b^2 + 3b$
- $G_3(a) = a^2 + 3a$
- $G_3(b) - G_3(a)$

$= b^2 + 3b - (a^2 + 3a)$

$= b^2 + 3b - a^2 - 3a$

$= b^2 - a^2 + 3(b - a)$

$= (b + a)(b - a) + 3(b - a)$

$= (a + b + 3)(b - a)$

81

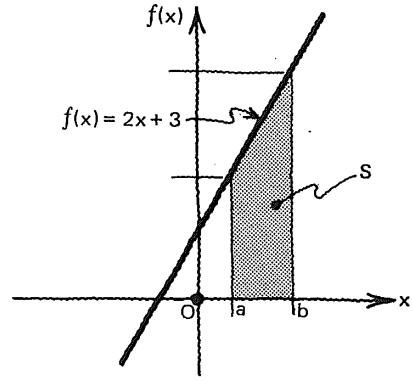
Verificación geométrica.

$f(a) = \square$

$f(b) = \square$

$S = \square$

Expresión simplificada $\square$



$2a + 3$

$2b + 3$

$$\frac{(2a + 3 + 2b + 3)(b - a)}{2}$$

$$\frac{2(a + b + 3)(b - a)}{2}$$

$(a + b + 3)(b - a)$

¡Se verifica!

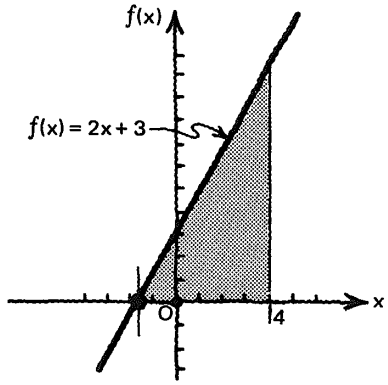
82

$$\int_0^x (2x + 3)\,dx = x^2 + 3x$$

Si $G_3(x) = x^2 + 3x$

$$\int_a^b (2x + 3)\,dx = G_3(b) - G_3(a)$$

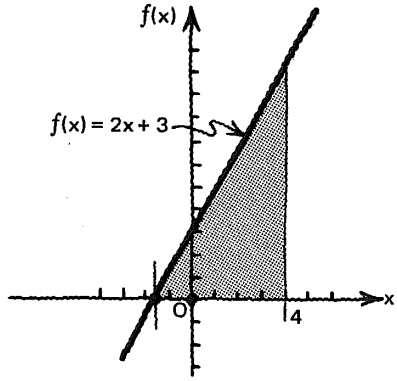
Aunque esta expresión
la hemos obtenido
para $b \geqslant a \geqslant 0$,
veamos, por curiosidad,
si se puede utilizar
para calcular, por ejemplo,
el área indicada en la figura.



83

En este caso,
es necesario determinar
el límite inferior.

a = ____



En $f(x) = 2x + 3$
para $f(x) = 0$
se tiene

$2x + 3 = 0$

de donde

$x = -\frac{3}{2}$

es decir, que:

$a = -\frac{3}{2}$

84

$$\int_a^b (2x + 3)\,dx = G_3(b) - G_3(a)$$

en donde:

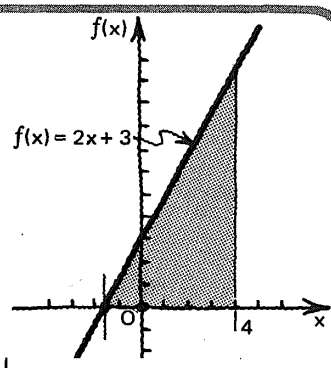
$G_3(x) = x^2 + 3x$

Para nuestro caso:

$$\int_{-\frac{3}{2}}^4 (2x + 3)\,dx = ____ - ____$$

$$= ____$$

$$= ____$$



$G_3(4) - G_3\left(-\frac{3}{2}\right) =$

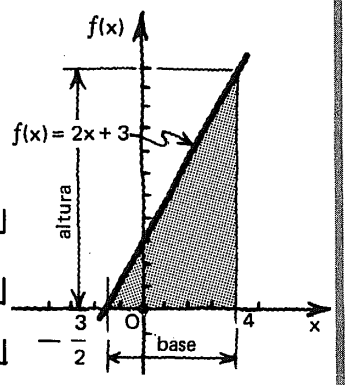
$(4)^2 + 3(4) - \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right)\right]$

$\downarrow$

$\frac{121}{4}$

85

Verificación geométrica.



base del triángulo = ____ = ____

altura del triángulo = ____ = ____

área del triángulo = ____ = ____

$4-\left(-\frac{3}{2}\right)=4+\frac{3}{2}=\frac{11}{2}$

$f(4) = 2\,(4) + 3 = 11$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{11}{2}\cdot 11=\frac{121}{4}$

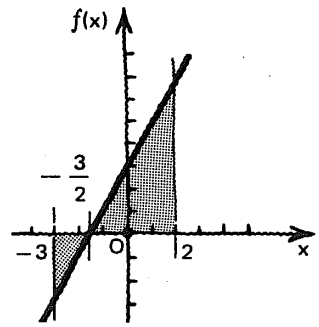
¡Se verifica!

86

$$\int_a^b (2x+3)\,dx = G_3(b) - G_3(a)$$

en que: $G_3(x) = x^2 + 3x$

Demos un paso más, y probemos la expresión de arriba, para el área señalada en la figura.



$$\int_{-3}^{2} (2x+3)\,dx = ____$$

$$= ____$$

$$= ____$$

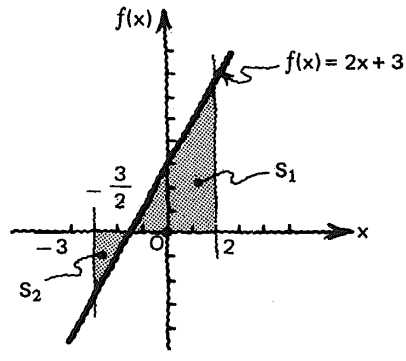
$G_3(2) - G_3(-3)$

$(2)^2 + 3\,(2) - [(-3)^2 + 3\,(-3)]$

10

87

Verificación geométrica.



S_1 = ____ = ____

S_2 = ____ = ____

S = ____ = ____

$\frac{\left(2+\frac{3}{2}\right)\cdot 7}{2}=\frac{49}{4}$

$\frac{\left(3-\frac{3}{2}\right)(3)}{2}=\frac{9}{4}$

$S_1 - S_2 = \frac{49}{4}-\frac{9}{4}=\frac{40}{4}=10$

¡Se verifica!

88

Enfoquemos nuevamente nuestra atención en la lista de fórmulas para la evaluación de integrales definidas que habíamos obtenido.

1. $\int_0^x c\,dx = cx$

2. $\int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2}$

3. $\int_0^x (2x + 3)\,dx = x^2 + 3x$

4. $\int_0^x (mx + b)\,dx = \frac{mx^2}{2} + bx$

5. $\int_0^x x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$

$\int_0^x x^3\,dx = \frac{x^4}{4}$

89

Tomemos la primera de ellas, y escribámosla así:

1. $\int_0^x c\,dx = G_1(x)$

siendo

$G_1(x) = cx$

Ahora calculemos la derivada de G_1, es decir:

$G_1'(x) = $ [_____]

c

90

La segunda:

$\int_0^x x\,dx = G_2(x) \qquad G_2(x) = \frac{x^2}{2}$

$G_2'(x) = $ [_____]

x

91

La tercera:

$$\int_0^x (2x + 3)\,dx = G_3(x) \quad G_3(x) = x^2 + 3x$$

$G_3'(x) =$ [ ]

$2x + 3$

92

La cuarta:

$$\int_0^x (mx + b)\,dx = G_4(x) \quad G_4(x) = \frac{mx^2}{2} + bx$$

$G_4'(x) =$ [ ]

$mx + b$

93

La quinta:

$$\int_0^x x^2\,dx = G_5(x) \quad G_5(x) = \frac{x^3}{3}$$

$G_5'(x) =$ [ ]

x^2

94

La sexta:

$$\int_0^x x^3\,dx = G_6(x) \qquad G_6(x) = \frac{x^4}{4}$$

$$G_6'(x) = \boxed{}$$

x^3

95

Resumamos los resultados y observémoslos con mucha atención.

1. $\int_0^x c\,dx = G_1(x)$ • $G_1(x) = cx$ • $G_1'(x) = c$

2. $\int_0^x x\,dx = G_2(x)$ • $G_2(x) = \frac{x^2}{2}$ • $G_2'(x) = x$

3. $\int_0^x (2x + 3)\,dx = G_3(x)$ • $G_3(x) = x^2 + 3x$ • $G_3'(x) = 2x + 3$

4. $\int_0^x (mx + b)\,dx = G_4(x)$ • $G_4(x) = \frac{mx^2}{2} + bx$ • $G_4'(x) = mx + b$

5. $\int_0^x x^2\,dx = G_5(x)$ • $G_5(x) = \frac{x^3}{3}$ • $G_5'(x) = x^2$

6. $\int_0^x x^3\,dx = G_6(x)$ • $G_6(x) = \frac{x^4}{4}$ • $G_6'(x) = x^3$

96

Vemos que, en todos los casos, la

fórmula para la evaluación de la integral

es una función cuya derivada es el integrando.
Por ejemplo, para la fórmula 4:

$$\int_0^x (mx + b)\,dx = G_4(x) \qquad G_4(x) = \frac{mx^2}{2} + bx$$

$$G_4'(x) = mx + b$$

97

Para la fórmula 5:

$$\int_0^x x^2\,dx = G_5(x) \qquad G_5(x) = \frac{x^3}{3}$$

$$G_5'(x) = x^2$$

Decimos que:

la fórmula para la evaluación de la integral es una antiderivada (o primitiva)

del integrando.

98

En el siglo XVII
algunos matemáticos
— Barrow, Newton, Leibnitz —
habían descubierto esta
importante conexión entre el
Cálculo Diferencial y el Cálculo Integral.
Sus hallazgos pueden ser resumidos
en el siguiente teorema.

99

Teorema de evaluación del cálculo integral .

Si f es una función

continua

en el intervalo [a, b]
entonces,

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

en que G(x) es cualquier antiderivada o primitiva de f, es decir que:

$$G'(x) = f(x)$$

8.2.2

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *explicar* la conexión entre las dos ramas del cálculo: diferencial e integral.

2.3

Antiderivadas de una función

100

Consideremos la función

$$G_1(x) = 3x^2 + 5x$$

y calculemos su derivada:

$G_1'(x) =$ [_____]

$6x + 5$

101

$G_1(x) = 3x^2 + 5x \rightarrow G_1'(x) = 6x + 5$

$G_2(x) = 3x^2 + 5x + 1 \rightarrow G_2'(x) =$ [_____]

$6x + 5$

102

$G_1(x) = 3x^2 + 5x \rightarrow G_1'(x) = 6x + 5$

$G_2(x) = 3x^2 + 5x + 1 \rightarrow G_2'(x) = 6x + 5$

$G_3(x) = 3x^2 + 5x + 2 \rightarrow G_3'(x) = \square$

$6x + 5$

103

$G_1(x) = 3x^2 + 5x \rightarrow G_1'(x) = 6x + 5$

$G_2(x) = 3x^2 + 5x + 1 \rightarrow G_2'(x) = 6x + 5$

$G_3(x) = 3x^2 + 5x + 2 \rightarrow G_3'(x) = 6x + 5$

$G_4(x) = 3x^2 + 5x - 450 \rightarrow G_4'(x) = \square$

$6x + 5$

104

$G_1(x) = 3x^2 + 5x$

$G_2(x) = 3x^2 + 5x + 1$

$G_3(x) = 3x^2 + 5x + 2$

$G_4(x) = 3x^2 + 5x - 450$

$\rightarrow G'(x) = 6x + 5$

$G_5(x) = 3x^2 + 5x + C$
$C \in \mathbb{R}$

• $G_5'(x) = \square$

$6x + 5$

105

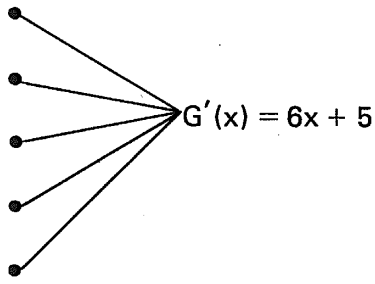
$G_1(x) = 3x^2 + 5x$

$G_2(x) = 3x^2 + 5x + \mathbf{1}$

$G_3(x) = 3x^2 + 5x + \mathbf{2}$

$G_4(x) = 3x^2 + 5x - \mathbf{450}$

$G_5(x) = 3x^2 + 5x + \mathbf{C}$



Observamos que:

dos funciones distintas pueden tener derivadas idénticas, y que dos funciones que tienen derivadas idénticas, difieren entre sí por una constante aditiva.

106

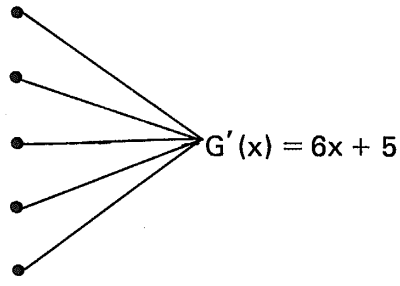
$G_1(x) = 3x^2 + 5x$

$G_2(x) = 3x^2 + 5x + \mathbf{1}$

$G_3(x) = 3x^2 + 5x + \mathbf{2}$

$G_4(x) = 3x^2 + 5x - \mathbf{450}$

$G_5(x) = 3x^2 + 5x + \mathbf{C}$



Decimos que:

G_1 es una **antiderivada** o una **primitiva** de G'
G_2 es otra **antiderivada** u otra **primitiva** de G'

etcétera.

107

Es posible demostrar que:
si dos **funciones** son **continuas** en un cierto intervalo de su dominio común y tienen derivadas idénticas, entonces difieren entre sí por una constante aditiva.

108

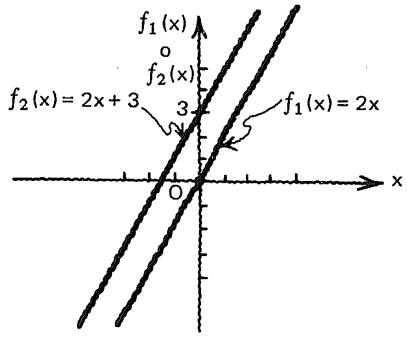
Por ejemplo:
consideremos las dos funciones lineales

$f_1(x) = 2x$

y

$f_2(x) = 2x + 3$

cuyas gráficas se muestran



$f_1'(x) =$ ____

$f_2'(x) =$ ____

2

2

109

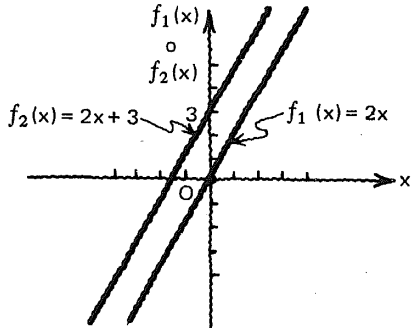
Observamos que:
f_1 y f_2 tienen derivadas idénticas.

Interpretación geométrica:

- las rectas f_1 y f_2 tienen la misma pendiente m = ____ es decir son paralelas.
- f_1 y f_2 difieren por una constante aditiva:

C = ____

- la distancia vertical que separa las dos rectas en toda su longitud, es constante e igual a ____ .



2

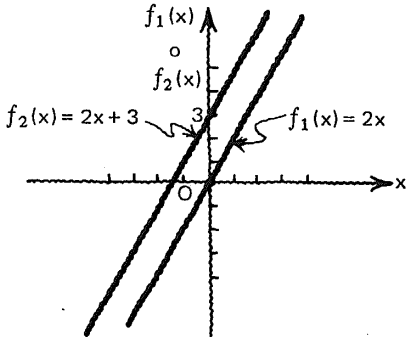
3

3

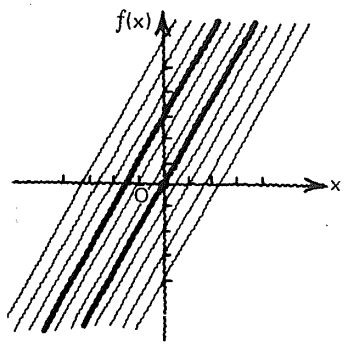
110

f_1 y f_2 son dos antiderivadas o primitivas de la función $f(x) = 2$.

Tracemos otras rectas que correspondan a funciones que sean antiderivadas o primitivas de f.



Por ejemplo:

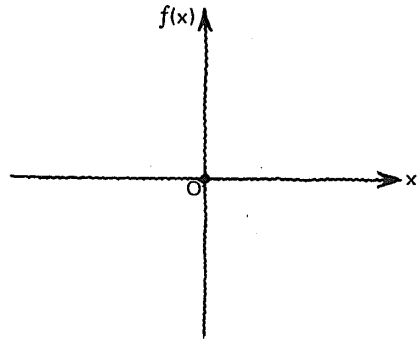


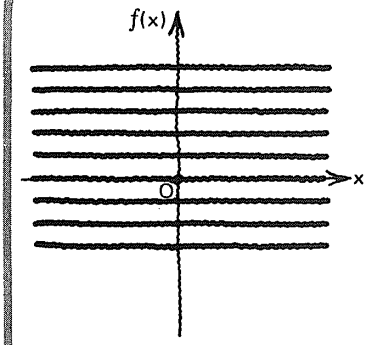
La gráfica de las antiderivadas de $f(x) = 2$ está constituida por una **familia de rectas paralelas** con pendiente igual a 2.

111

La representación gráfica de las antiderivadas o primitivas de la función

$f(x) = 0$
es:





una familia de rectas paralelas al eje Ox

112

Ahora, sean las dos funciones cuadráticas

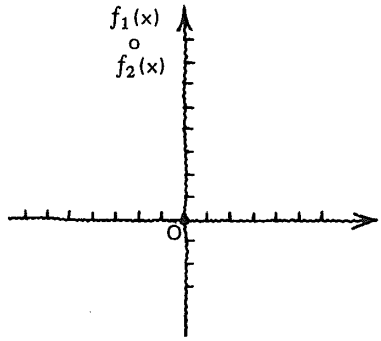
$f_1(x) = x^2$

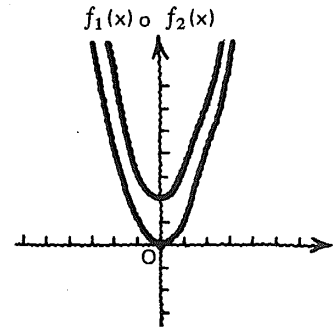
$f_2(x) = x^2 + 2$

cuyas gráficas se muestran.
Calculemos:

$f_1'(x) =$ ____

$f_2'(x) =$ ____





2x

2x

113

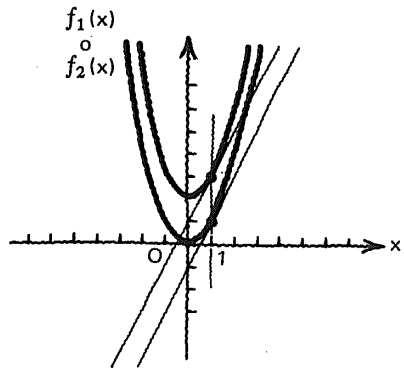
Observaciones:

- f_1 y f_2 tienen derivadas idénticas.
- Interpretación geométrica:

  ____

- f_1 y f_2 difieren por una constante aditiva C = ____
- Una observación más:

  ____



- Las dos curvas f_1 y f_2 tienen la misma pendiente para una determinada abscisa, por ejemplo: para x = 1, m = 2
- 2
- la distancia vertical que separa las dos curvas es constante para toda su longitud, y es igual a 2

114

Entonces, debemos recordar
que dos antiderivadas
de una cierta función
difieren entre sí
por una constante aditiva.

115

Algunos ejemplos
parecen contradecir
el principio enunciado
en el cuadro anterior.

Sean las funciones: y sus derivadas

- $f_1(x) = x^2 - 10$ — $f_1'(x) =$ [ ]
- $f_2(x) = (x + 2)(x - 2)$ — $f_2'(x) =$ [ ]

$2x$

$(x+2)+(x-2) = x+2+x-2$
$= 2x$

116

Vemos que la función $f(x) = 2x$

tiene las dos antiderivadas $\begin{cases} f_1(x) = x^2 - 10 \\ \text{y} \\ f_2(x) = (x + 2)(x - 2) \end{cases}$

que no parecen diferir por una constante aditiva,
pues ambas tienen diferente aspecto.
Pero observando con cuidado nos damos cuenta que:

$$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$$

que difiere de $x^2 - 10$ por la constante aditiva [ ]

ya que $\begin{cases} (x^2 - 10) - (x^2 - 4) = \text{[ ]} \\ (x^2 - 4) - (x^2 - 10) = \text{[ ]} \end{cases}$

$|6|$

-6

$+6$

117

Debemos considerar que las expresiones:

$(x + 2)\ (x - 2)$

y

$x^2 - 4$

definen la misma función.

118

Atención.

Ahora, intentemos escribir una expresión para una antiderivada o primitiva cualquiera de la función:

$f(x) = 5$ $\qquad G(x) =$ [ ]

$5x + C \qquad C \in \mathbb{R}$

comprobación

$$\frac{d\,(5x + C)}{dx} = 5$$

119

$f_1(x) = c \qquad G_1(x) =$ [ ]

puesto que

$G_1'(x) =$ [ ]

$cx + C \qquad C \in \mathbb{R}$

c

120

$f_2(x) = x$ $\quad G_2(x) =$ [ ]

puesto que [ ]

$\frac{x^2}{2} + C$

$G_2'(x) = x$

121

$f_3(x) = 2x + 3$ $\quad G_3(x) =$ [ ]

puesto que [ ]

$x^2 + 3x + C$

$G_3'(x) = 2x + 3$

122

$f_4(x) = mx + b$ $\quad G_4(x) =$ [ ]

puesto que [ ]

$\frac{mx^2}{2} + bx + C$

$G_4'(x) = mx + b$

123

$f_5(x) = x^2$ $\quad G_5(x) =$ [ ]

puesto que [ ]

$\frac{x^3}{3} + C$

$G_5'(x) = x^2$

124

$f_6(x) = x^3$ $\quad G_6(x) =$ [ ]

puesto que [ ]

$\frac{x^4}{4} + C$

$G_6'(x) = x^3$

125

Resumiendo:

1. $f_1(x) = c$ $\quad G_1(x) = cx + C$
2. $f_2(x) = x$ $\quad G_2(x) = \frac{x^2}{2} + C$
3. $f_3(x) = 2x + 3$ $\quad G_3(x) = x^2 + 3x + C$
4. $f_4(x) = mx + b$ $\quad G_4(x) = \frac{mx^2}{2} + bx + C$
5. $f_5(x) = x^2$ $\quad G_5(x) = \frac{x^3}{3} + C$
6. $f_6(x) = x^3$ $\quad G_6(x) = \frac{x^4}{4} + C$

Comparemos este resumen con el cuadro 88.

126

Utilizaremos el siguiente símbolo para representar a las antiderivadas o primitivas de la función f.

$$\int f(x)\,dx$$

Le llamaremos: "la integral indefinida de efe de x diferencial de x"

127

Puesto que una antiderivada o primitiva de una función de x es otra función de x, podemos excribir:

$$\int f(x)\,dx = G(x)$$

128

Haciendo uso del simbolismo mencionado, podemos reescribir la tabla del cuadro 125 en la forma siguiente:

Respuesta en el cuadro siguiente.

1. $\int c\,dx = cx + C$

2. $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

3. $\int (2x + 3)\,dx = x^2 + 3x + C$

4. $\int (mx + b)\,dx = \frac{mx^2}{2} + bx + C$

5. $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

6. $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$

A C le llamaremos: "constante de integración".

129

De la observación de la tabla del cuadro anterior podemos deducir algunas reglas para la determinación de las antiderivadas o primitivas de una función, operación a la que llamaremos

integración.

130

Veamos:

1. $\int c\,dx = cx + C$

si $c = 1$

$\int 1\,dx = 1x + C$

que podemos escribir así:

$\int dx = x + C$

131

Habíamos obtenido:

2. $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

5. $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

6. $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$

Intentemos dar el resultado de:

$\int x^4\,dx =$ ⌊_____⌋

• $\frac{x^5}{5} + C$

puesto que

$\frac{d\left(\frac{x^5}{5} + C\right)}{dx} = x^4$

132

2. $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

5. $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

6. $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$

$\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C$

$\int x^5\,dx =$ ⌊_____⌋

• $\frac{x^6}{6}$

puesto que

$\frac{d\left(\frac{x^6}{6} + C\right)}{dx} = x^5$

133

2. $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

5. $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

6. $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$

$\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C$

$\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + C$

$\int x^n\,dx =$ ⌊_____⌋

• $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

puesto que

$\frac{d\left(\frac{x^{n+1}+C}{n+1}\right)}{dx} = \frac{(n+1)\,x^n}{n+1} = x^n$

134

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

Esta fórmula es válida para cualquier $n \in \mathbb{R} \wedge n \neq -1$, ya que para $n = -1$, el segundo miembro no se define:

$$\frac{x^0}{0} = \textbf{número no definido}$$

135

Además son válidas:

$$\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$$

y

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

136

Estudiemos con atención.

3. $\int (2x + 3)\, dx = x^2 + 3x + C$

$$\int (2x+3)\, dx = \int 2x\, dx + 3\int dx = 2\int x\, dx + 3\int dx$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + 3\,(x + C_2) = x^2 + 2C_1 + 3x + 3C_2$$

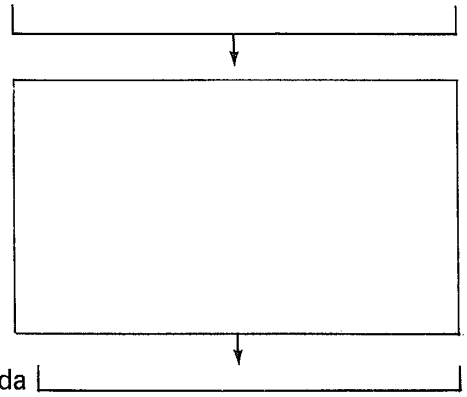
$$= x^2 + 3x + \underbrace{2C_1 + 3C_2}_{C}$$

$$= x^2 + 3x + C$$

137

4. $\int (mx + b)\, dx = \frac{mx^2}{2} + bx + C$

Utilizando el procedimiento del cuadro anterior:

$\int (mx + b)\, dx =$ 

Expresión simplificada

- $\int mx\, dx + \int b dx$

$m \int x dx + b \int dx$

$m\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) + b\,(x + C_2)$

$\frac{mx^2}{2} + mC_1 + bx + bC_2$

$\frac{mx^2}{2} + bx + \underbrace{mC_1 + bC_2}_{C}$

$\frac{mx^2}{2} + bx + C$

138

Utilizando las siguientes fórmulas y el procedimiento estudiado en los dos ejemplos anteriores, es posible calcular un gran número de integrales indefinidas:

1. $\int dx = x + C$

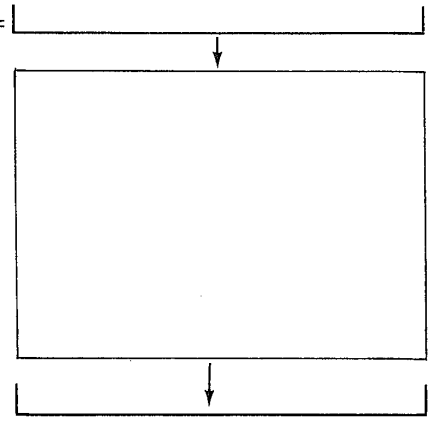
2. $\int c\, f(x) dx = c \int f(x) dx$

3. $\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]\, dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x) dx + \ldots + \int f_n(x)\, dx$

4. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$

139

Por ejemplo:

$\int (3x^2 + 2x)\, dx =$ 

Expresión simplificada

$\int 3x^2\, dx + \int 2x\, dx$

$3 \int x^2\, dx + 2 \int x dx$

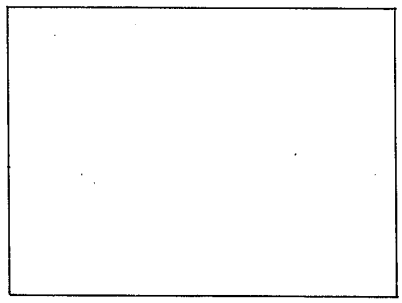
$3\left[\frac{x^3}{3} + C_1\right] + 2\left[\frac{x^2}{2} + C_2\right]$

$x^3 + x^2 + \underbrace{3C_1 + 2C_2}_{C}$

$x^3 + x^2 + C$

140

$\int (x^3 + 8x^2 - 3x + 5)\, dx =$ ⌊ ⌋



Expresión simplificada ⌊ ⌋

$\int x^3\, dx + \int 8x^2\, dx + \int -3x\, dx + \int 5\, dx$

$\int x^3\, dx + 8\int x^2\, dx - 3\int x dx + 5\int dx$

$\frac{x^4}{4} + \frac{8x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 5x + C$

141

$\int (25x^5 - 5x + 50)\, dx =$ ⌊ ⌋

$\frac{25x^6}{6} - \frac{5x^2}{2} + 50x + C$

142

$\int (8 - 3x^4)\, dx =$ ⌊ ⌋

$\int (x^3 - a^3)\, dx =$ ⌊ ⌋

$\int (5x^2 - 6x + 3)\, dx =$ ⌊ ⌋

$\int (x^{12} - 7x^7 + 1)\, dx =$ ⌊ ⌋

$8x - \frac{3x^5}{5} + C$

$\frac{x^4}{4} - a^3 x + C$

$\frac{5x^3}{3} - 3x^2 + 3x + C$

$\frac{x^{13}}{13} - \frac{7x^8}{8} + x + C$

8.2.3.1

Práctica adicional de integración de funciones polinomiales, si se considera necesario.

143

Ahora

$$\int x^{-1}\,dx = \boxed{\qquad}$$

$$\int x^{-2}\,dx = \boxed{\qquad}$$

$$\int x^{-3}\,dx = \boxed{\qquad}$$

$$\int x^{-4}\,dx = \boxed{\qquad}$$

no es aplicable la regla **4** para $n = -1$

$-x^{-1} + C$

$-\frac{x^{-2}}{2} + C$

$-\frac{x^{-3}}{3} + C$

144

$$\int \frac{dx}{x} = \boxed{\qquad}^{*}$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \boxed{\qquad}$$

$$\int \frac{dx}{x^3} = \boxed{\qquad}$$

$$\int \frac{dx}{x^4} = \boxed{\qquad}$$

(*) $\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x} dx$

Respuesta en el cuadro siguiente.

No es aplicable la regla 4,
puesto que $\frac{1}{x}$ equivale a x^{-1}

$$\int x^{-2}\,dx = -x^{-1} = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int x^{-3}\,dx = -\frac{x^{-2}}{2} = -\frac{1}{2x^2} + C$$

$$\int x^{-4}\,dx = -\frac{x^{-3}}{3} = -\frac{1}{3x^3} + C$$

145

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \underline{\qquad}$$

$$\int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \underline{\qquad}$$

$$\int x^{\frac{1}{4}}\,dx = \underline{\qquad}$$

$$\int x^{\frac{1}{5}}\,dx = \underline{\qquad}$$

$$\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C$$

$$\frac{4x^{\frac{5}{4}}}{5} + C$$

$$\frac{5x^{\frac{6}{5}}}{6} + C$$

146

$$\int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \underline{\qquad}$$

$$\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \underline{\qquad}$$

$$\int x^{\frac{5}{4}}\,dx = \underline{\qquad}$$

$$\int x^{\frac{5}{7}}\,dx = \underline{\qquad}$$

$$\frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + C$$

$$\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

$$\frac{4x^{\frac{9}{4}}}{9} + C$$

$$\frac{7x^{\frac{12}{7}}}{12} + C$$

147

$\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$ ____

$\int x^{-\frac{3}{4}}\,dx =$ ____

$\int x^{-\frac{5}{7}}\,dx =$ ____

$\int x^{-\frac{7}{8}}\,dx =$ ____

$2x^{\frac{1}{2}} + C$

$4x^{\frac{1}{4}} + C$

$\frac{7x^{\frac{2}{7}}}{2} + C$

$8x^{\frac{1}{8}} + C$

148

$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx =$ ____

$\int \sqrt[3]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{3}}\,dx =$ ____

$\int \sqrt[4]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{4}}\,dx =$ ____

$\int \sqrt[5]{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{5}}\,dx =$ ____

$\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C$

$\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + C$

$\frac{4x^{\frac{5}{4}}}{5} + C = \frac{4\sqrt[4]{x^5}}{5} + C$

$\frac{5x^{\frac{6}{5}}}{6} + C = \frac{5\sqrt[5]{x^6}}{6} + C$

149

$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx =$ ____

$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}} = \int x^{-\frac{1}{3}}\,dx =$ ____

$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{4}}} = \int x^{-\frac{1}{4}}\,dx =$ ____

$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{5}}} = \int x^{-\frac{1}{5}}\,dx =$ ____

$2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$

$\frac{3x^{\frac{2}{3}}}{2} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + C$

$\frac{4x^{\frac{3}{4}}}{3} + C = \frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3} + C$

$\frac{5x^{\frac{4}{5}}}{4} + C = \frac{5\sqrt[5]{x^4}}{4} + C$

150

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}} = \int x^{-\frac{2}{3}}\,dx = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^5}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{5}{4}}} = \int x^{-\frac{5}{4}}\,dx = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^4}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{4}{5}}} = \int x^{-\frac{4}{5}}\,dx = \underline{\qquad\qquad}$$

$3x^{\frac{1}{3}} + C = 3\sqrt[3]{x} + C$

$-4x^{-\frac{1}{4}} + C = -\frac{4}{x^{\frac{1}{4}}} + C$

$= -\frac{4}{\sqrt[4]{x}} + C$

$5x^{\frac{1}{5}} + C = 5\sqrt[5]{x} + C$

151

$$\int x^{0.2}\,dx = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\int x^{0.25}\,dx = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\int x^{0.5}\,dx = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\int x^{0.75}\,dx = \underline{\qquad\qquad}$$

$\frac{x^{1.2}}{1.2} + C$

$\frac{x^{1.25}}{1.25} + C = 0.8x^{1.25} + C$

$\frac{x^{1.5}}{1.5} + C$

$\frac{x^{1.75}}{1.75} + C$

8.2.3.2

Práctica adicional de integración
de una función potencia
de la forma x^n con $n \in \mathbb{Q}$,
si se considera necesario.

152

$$\int 3\sqrt{x}\,dx = _____$$

$$\int \frac{3}{4}\sqrt[3]{x}\,dx = _____$$

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}}{5}dx = _____$$

$$\int -\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3}dx = _____$$

Respuesta en el cuadro siguiente.

$$3\int \sqrt{x}dx = 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = 2x^{\frac{3}{2}} + C = 2\sqrt{x^3} + C$$

$$\frac{3}{4}\int \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3}{4}\int x^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{9x^{\frac{4}{3}}}{16} + C = \frac{9\sqrt[3]{x^4}}{16} + C$$

$$\frac{1}{5}\int \sqrt[4]{x}\,dx = \frac{1}{5}\int x^{\frac{1}{4}}\,dx = \frac{4x^{\frac{5}{4}}}{25} + C = \frac{4\sqrt[4]{x^5}}{25} + C$$

$$-\frac{2}{3}\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = -\frac{2}{3}\int x^{\frac{2}{3}}\,dx = -\frac{2x^{\frac{2}{3}}}{5} = -\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{5} + C$$

153

$$\int (x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{4}{5}})\,dx = _____$$

$$\int (3\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x})\,dx = _____$$

$$\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = _____$$

Respuesta en el cuadro siguiente.

$$\int x^{\frac{2}{3}}\,dx + \int x^{\frac{4}{5}}\,dx = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + \frac{5x^{\frac{9}{5}}}{9} + C = \frac{3\sqrt[3]{x^5}}{5} + \frac{5\sqrt[5]{x^9}}{9} + C$$

$$3\int \sqrt{x}\,dx + 2\int \sqrt[3]{x}\,dx = 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx + 2\int x^{\frac{1}{3}}\,dx = 2x^{\frac{3}{2}} + \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{2} + C = 2\sqrt{x^3} + \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2} + C$$

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx - \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - 2x^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - 2\sqrt{x} + C$$

8.2.3.3

Práctica adicional de integración de funciones conteniendo expresiones de la forma x^n con $n \in \mathbb{Q}$, si se considera necesario.

154

$$\int x^{\sqrt{2}}\,dx = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\int x^{\sqrt[3]{2}}\,dx = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\int x^{\pi}\,dx = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\int x^{e}\,dx = \underline{\qquad\qquad}$$

$$\frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} + C$$

$$\frac{x^{\sqrt[3]{2}+1}}{\sqrt[3]{2}+1} + C$$

$$\frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + C$$

$$\frac{x^{e+1}}{e+1} + C$$

8.2.3.4

Práctica adicional de
integración de funciones
conteniendo expresiones
de la forma x^n con $n \in \mathbb{R}$,
si se considera necesario.

8.2.3

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el prototipo de las antiderivadas
de una función polinomial,
aplicando las 4 reglas siguientes:

1. $\int dx = x + C$

2. $\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx$

3. $\int -[f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]\, dx$

$$= \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)\, dx + \ldots + \int f_n(x)\, dx$$

4. $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$

- *determinar* el prototipo de las antiderivadas
de una función cuya ecuación
contiene expresiones
de la forma cx^n con $n \in \mathbb{R}$.

2.4

Constante de integración

155

Supóngase que se nos pide:

una ecuación de una recta que tenga pendiente igual a $\frac{2}{3}$.

Éste es, evidentemente,
un problema de "antiderivación",
si se nos permite
usar este término.

156

El problema consiste en
determinar una antiderivada
de la función $f(x) = \frac{2}{3}$,

es decir $G(x) = \int \frac{2}{3}\,dx =$ [ ]

$\frac{2}{3}x + C$

157

Cualquier ecuación que tenga la forma:

$$G(x) = \frac{2}{3}x + C$$

satisface el requerimiento de corresponder a una recta de pendiente $\frac{2}{3}$.

158

Por ejemplo:

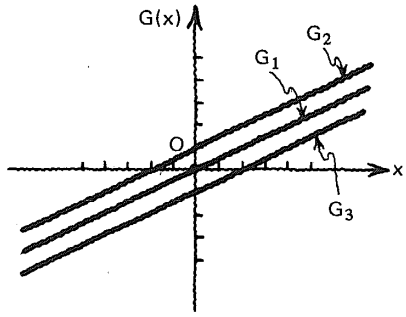
$G_1(x) = \frac{2}{3}x$

$G_2(x) = \frac{2}{3}x + 1$

$G_3(x) = \frac{2}{3}x - 1$

↓ etcétera

son ecuaciones de rectas con pendiente $\frac{2}{3}$.



159

Pero supongamos que se agrega un requerimiento más:

la recta debe contener al punto (3, 4).

Observamos que el requerimiento indicado equivale a dar por conocido el valor de la función para un cierto valor de la variable independiente.

160

$$G(x) = \frac{2}{3}x + C$$

Sabemos que

- si $x = 3$ $\qquad G(3) =$ [ ]

por lo tanto:

- $C =$ [ ]

ya que:

[ ]

4

2

- $G(3) = 4 = \frac{2}{3}(3) + C = 2 + C$

de donde:

$C = 4 - 2 = 2$

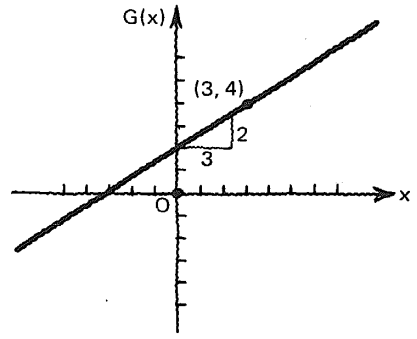
161

Obtenemos la ecuación:

$$G(x) = \frac{2}{3}x + 2$$

que corresponde a una recta que satisface los dos requirimientos o condiciones dadas:

- tiene pendiente $\frac{2}{3}$ y
- contiene al punto (3, 4)



162

Queremos ahora una ecuación de una curva: cuya pendiente en un punto cualquiera de abscisa x esté dada por la expresión **2x** y que pase por el punto **(0, − 3).**

163

El primer requerimiento se cumple con:

$$G(x) = \int \boxed{\qquad} = \boxed{\qquad}$$

- $2x\,dx$
- $x^2 + C$

164

Para $x = 0$ $G(x) = -3$

es decir $G(0) = -3$

entonces: $C = \boxed{\qquad}$

$G(0) = -3 = (0)^2 + C$

-3

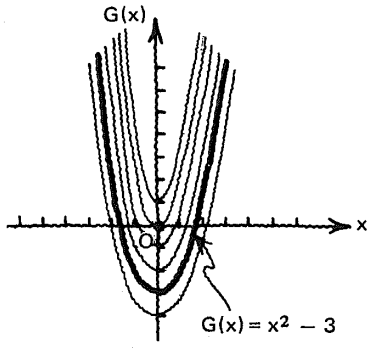
165

La antiderivada

$G(x) = x^2 - 3$

nos da la solución al problema propuesto.

La ecuación $G(x) = x^2 - 3$ corresponde a una curva cuya pendiente en un punto cualquiera de abscisa x está dada por $G'(x) = 2x$ y pasa por el punto $(0, -3)$.



$G(x) = x^2 - 3$ es una ecuación de una parábola particular perteneciente a la "familia de parábolas" representada por $G_1(x) = x^2 + C$.

Entonces, si conocemos el valor de la antiderivada para algún valor de la variable independiente, podemos determinar el valor de la constante de integración.

8.2.4.1

Práctica adicional de determinación de constantes de integración, si se considera necesario.

8.2.4

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *determinar* el valor de la constante de integración de una antiderivada, si se conoce el valor que asume ésta para un valor dado de la variable independiente.

2.5

Diferenciales, diferenciación y antidiferenciación

167

Uno de los símbolos que se utilizan para representar a la derivada de una función es éste:

$$\frac{dy}{dx}$$

en que **y** es la variable dependiente y **x** la variable independiente.

168

Debemos tener presente que:

$$\frac{dy}{dx}$$

no representa un cociente sino el límite del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ cuando $\Delta x \to 0$.

169

Sin embargo,

$$\frac{dy}{dx}$$

tiene propiedades de fracción,
como lo hemos podido observar
en las expresiones:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$ ← regla de la cadena

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$ ← derivada de la función inversa

170

Veamos, entonces,
si podemos asignar
significados independientes
a los términos

dy y dx

de la expresión

$$\frac{dy}{dx}.$$

171

Consideremos
la función

$y = f(x)$

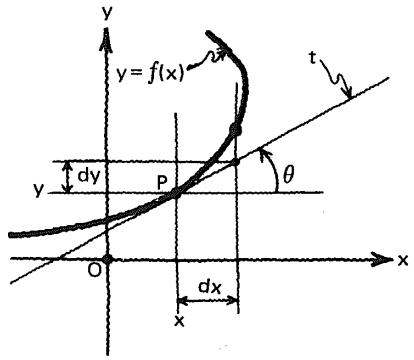
cuya gráfica se muestra
en el cuadro siguiente.

172

P es un punto cualquiera
de la curva f, y t
es la recta tangente
a la curva en P.
Si llamamos **dx**
a un incremento arbitrario
de la variable independiente x
y **dy** al correspondiente
incremento de la ordenada de t,
podemos escribir:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

puesto que $f'(x) = \tan \theta$,
siendo θ el ángulo de inclinación
de la recta tangente en P.



173

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

de donde:

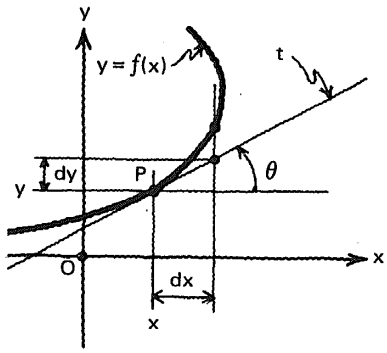
$$dy = f'(x)\,dx$$

o bien

$$d\,f(x) = f'(x)\,dx$$

Estas expresiones representan
lo que llamaremos

la diferencial de la
función f.



174

$$df(x) = dy = f'(x)\,dx$$

Como $f'(x)\,dx$ puede ser escrita en la forma
$\frac{dy}{dx}$, obtenemos:

$$df(x) = \frac{dy}{\cancel{dx}}\cancel{dx}$$

o

$$dy = \frac{dy}{\cancel{dx}}\cancel{dx}$$

175

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

Para determinar la diferencial de una función basta con multiplicar su derivada por la diferencial de la variable independiente.

176

Por ejemplo:

la diferencial de la función

$$f(x) = 5x^2 + 6x + 3$$

es:

$df(x) =$ [ ]

$(10x + 6)\,dx$

177

$y = x^3 - 8$ $\quad dy =$ [ ]

$r = 7\theta^4 - 5\theta + 6$ $\quad dr =$ [ ]

$s = -3t^2 + 5t - 4$ $\quad ds =$ [ ]

$3x^2\,dx$

$(28\theta^3 - 5)\,d\theta$

$(-6t + 5)\,dt$

178

Observemos con atención.

Si $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ $\quad dy = \square$

Si $\frac{dr}{d\theta} = 28\theta^3 - 5$ $\quad dr = \square$

Si $\frac{ds}{dt} = -6t + 5$ $\quad ds = \square$

$3x^2\ dx$

$(28\theta^3 - 5)\ d\theta$

$(-6t + 5)\ dt$

179

Si $dy = 3x\ dx$ $\quad \frac{dy}{dx} = \square$

Si $dr = (14\theta^3 + 2)\ d\theta$ $\quad \frac{dr}{d\theta} = \square$

Si $ds = (18 - t^2)\ dt$ $\quad \frac{ds}{dt} = \square$

$3x$

$14\theta^3 + 2$

$18 - t^2$

180

A esta operación de determinar la diferencial (o la derivada) de una función se le llama

diferenciación(*)

(*) Generalmente se usa el término "diferenciación" con preferencia al de "derivación", que hemos usado hasta ahora.

181

Estudiemos con mucha atención este cuadro y los siguientes.

Consideremos la expresión:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 5x - 2$$

que representa la derivada de una cierta función $y = G(x)$.

182

Si

- $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 5x - 2$
- $dy =$ [_____]

$(3x^2 + 5x - 2)\,dx$

183

$$dy = (3x^2 + 5x - 2)\,dx$$

Ahora, queremos saber

qué es y, es decir: $y = G(x) = ?$

o en otras palabras,
¿cuál es el prototipo de las

antiderivadas

de $3x^2 + 5x - 2$?

184

$$dy = (3x^2 + 5x - 2)\,dx$$

$$y = G(x) = ?$$

Hagamos uso del siguiente simbolismo:

$$y = \int dy = \int (3x^2 + 5x - 2)\,dx = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$x^3 + \frac{5x^2}{2} - 2x + C$$

185

Observar con suma atención.

DERIVADA: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 5x - 2$

DIFERENCIAL: $dy = (3x^2 + 5x - 2)\,dx$

- $y = G(x) = ?$

INTEGRAL INDEFINIDA: $y = \int dy = \int (3x^2 + 5x - 2)\,dx$

$\downarrow$

PROTOTIPO DE LAS ANTIDERIVADAS: $y = G(x) = x^3 + \frac{5x^2}{2} - 2x + C$

186

A la operación descrita,
inversa de la diferenciación,
se le llama

antidiferenciación o **integración.**

187

- $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 5x - 2$
- $dy = (3x^2 + 5x - 2)\,dx$
- $y = \int dy = \int (3x^2 + 5x - 2)\,dx$

Queda explicada la presencia del término **dx** (diferencial de la variable independiente) en el operador de la integral.

188

Finalmente observemos la

cancelación

de los operadores de las operaciones inversas de diferenciación e integración en la expresión:

$$y = \cancel{\int} \cancel{dy}$$

de manera análoga a lo que sucede por ejemplo con los operadores de las operaciones inversas de potenciación y radicación:

$$a = \cancel{\sqrt[n]{}}\, a^n$$

189

Entonces, cuando nos encontramos con una expresión como ésta:

$$\int (3x + 2)\,dx = G(x)$$

debemos dar respuesta a la pregunta:

¿Cuál es la función G(x) cuya derivada es $3x + 2$ ó cuya diferencial es $(3x + 2)\,dx$?

8.2.5

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *dar* la diferencial de una función como el producto de su derivada y la diferencial de la variable independiente;
- *interpretar* la integración como una operación inversa de la diferenciación.

2.6

Evaluación de integrales definidas

190

Enfoquemos nuevamente nuestra atención en el Teorema de Evaluación del Cálculo Integral.

191

Si f es una **función continua** en el intervalo cerrado [a, b], entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

en que G(x) es cualquier antiderivada o primitiva de f, es decir que:

$$G'(x) = f(x)$$

192

Como podemos observar, el problema de evaluar una integral definida es, fundamentalmente, un asunto de

antidiferenciación.

193

Calculamos primero la integral indefinida

$$\int f(x)\,dx = G(x)$$

y luego, evaluamos la diferencia:

$$G(b) - G(a)$$

194

Hacemos uso del siguiente simbolismo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx \right]_a^b = G(b) - G(a)$$

195

Ahora bien,
en el enunciado del teorema que estamos considerando, leemos que:

G (x) es cualquier antiderivada o primitiva de x,

por lo que escogeremos aquella que tenga la expresión más simple (con C = 0), dado que la constante de integración C se cancela en el cálculo de la diferencia G (b) – G (a), como lo podemos ver en el siguiente cuadro.

196

Atención.

Supongamos que: $\int f(x)\,dx = G(x)$

y que: $G(x) = G_1(x) + C$

entonces: $\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = G(a) - G(b)$

$= G_1(a) + C - [G_1(b) + C]$

$= G_1(a) - G_1(b) + \cancel{C} - \cancel{C}$

$= G_1(a) - G_1(b)$

197

Atención.

Nota importante

Antes de aplicar el procedimiento descrito para la evaluación de la integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

* debemos cerciorarnos de que *f* sea **continua**

en el intervalo cerrado [a, b].

Sin este requisito no es posible asegurar que el resultado obtenido sea el valor buscado de la integral.

198

En otras palabras:

- si la integral es propia, entonces podemos asegurar que el procedimiento descrito es válido
- si la integral es impropia, entonces no podemos garantizar que el procedimiento sea válido, aunque eventualmente obtengamos resultados correctos

199

Un ejemplo.
Se requiere evaluar la integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

por el procedimiento
que estamos considerando.

200

Veamos:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \square$$

Expresión del integrando en la forma: x^n

$$= \left[\square \right]_{-1}^{1}$$

Integral indefinida G(x) para C = 0

$$= \square$$

Cálculo de la diferencia G(b) − G(a)

$$\int_{-1}^{1} x^{-2}\, dx$$

$-x^{-1}$ o bien $-\frac{1}{x}$

$$\left(-\frac{1}{1}\right)-\left(\frac{1}{-1}\right)=-1+1=0$$

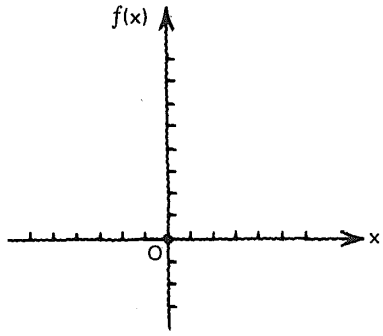
201

Hemos obtenido:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = 0$$

Veamos si este resultado es geométricamente válido, trazando la gráfica de

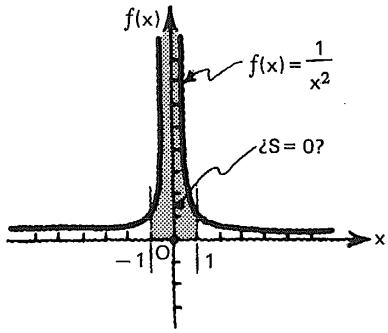
$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$



Respuesta en el cuadro siguiente.

¿Podemos aceptar que el área S es nula?

Debemos observar que f no es continua en el intervalo cerrado $[-1, 1]$; presenta una discontinuidad en $x = 0$.



202

Teniendo en cuenta esta recomendación de

verificar si la función por integrar es continua

en el intervalo considerado, vamos a evaluar algunas integrales, verificando geométricamente los resultados, siempre que sea posible.

203

¿es continua $f(x) = 5$ en $[2, 5]$? **Sí/No**

$$\int_2^5 5\,dx = [\quad]_2^5 \leftarrow G(x) \text{ para } C = 0$$

$$= \quad = \quad$$

Cálculo de $G(b) - G(a)$

Resultado simplificado.

Sí

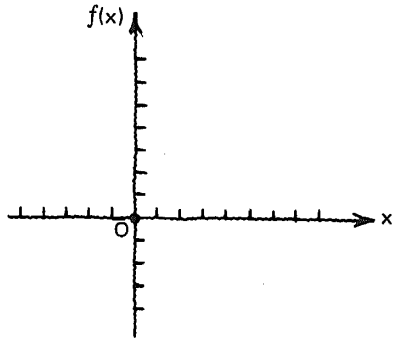
$5x$

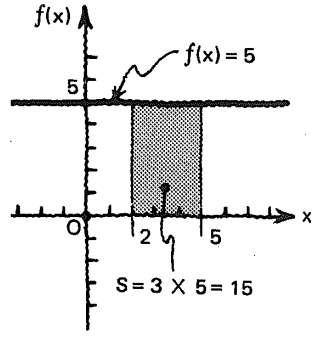
$5(5) - 5(2) = 25 - 10 = \mathbf{15}$

204

$$\int_2^5 5\,dx = [5x]_2^5 = 5\,(5) - 5\,(2) = 25 - 10 = 15$$

Interpretación geométrica:





205

¿Es continua $f(x) = x$ en $[0, 4]$? **Sí/No**

$$\int_0^4 x\,dx = [\quad]_0^4$$

$$= \quad = \quad$$

Sí

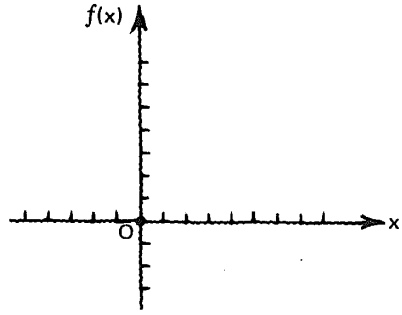
$\frac{x^2}{2}$

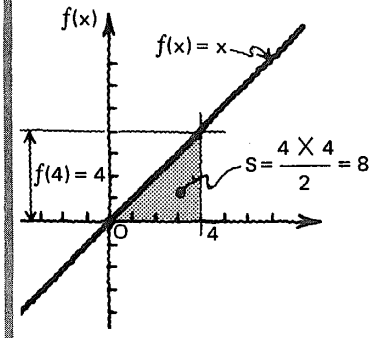
$\frac{(4)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} = 8 - 0 = 8$

206

$$\int_0^4 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{(4)^2}{4} - \frac{(0)^2}{2} = 8$$

Geométricamente:





207

¿Es continua $f(x) = \frac{x}{2}$ en $[-1, 3]$ **Sí/No**

$$\int_{-1}^{3} \frac{x\,dx}{2} = \left[\quad\right]_{-1}^{3}$$

$$= \quad = \quad$$

Sí

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{4}$$

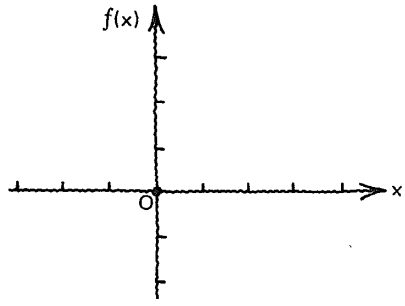
$$\frac{(3)^2}{4} - \frac{(-1)^2}{4} = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2$$

208

$$\int_{-1}^{3} \frac{x\,dx}{2} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{3} x\,dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{3} = \left[\frac{x^2}{4}\right]_{-1}^{3}$$

$$= \frac{(3)^2}{4} - \frac{(-1)^2}{4} = 2$$

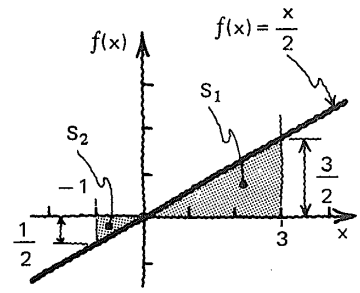
Geométricamente:



$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$S = |S_1| - |S_2| = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2$$



209

$$\int_{-4}^{-1} (3 - x)\,dx = ?$$

¿Es continua $f(x) =$ [_____] en $[-4, -1]$?

Sí	No
adelante	alto

$3 - x$

Sí → adelante

210

$$\int_{-4}^{-1} (3 - x)\,dx =$$ [_____]

$$\left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{-1}$$

$$\left[3(-1) - \frac{(-1)^2}{2}\right] - \left[3(-4) - \frac{(-4)^2}{2}\right]$$

$$\left(-3 - \frac{1}{2}\right) - (-12 - 8)$$

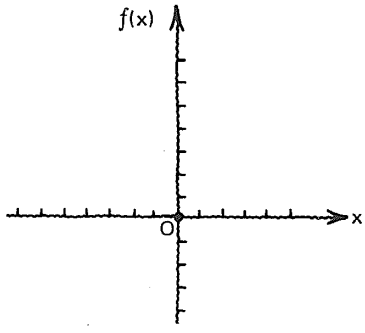
$$-\frac{7}{2} + 20$$

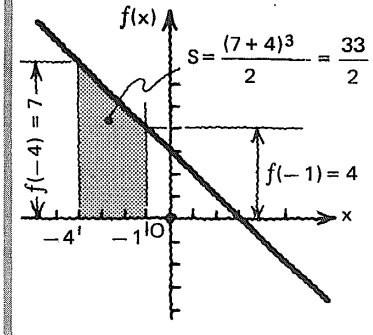
$$\frac{33}{2}$$

211

$$\int_{-4}^{-1} (3 - x)\,dx = \frac{33}{2}$$

Interpretación geométrica:





212

$$\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,dx = ?$$

¿Es $f(x) =$ [ ] continua en $[-2, 2]$?

Sí | **No**
adelante | alto

$x^2 - 4$

Sí → adelante

213

$$\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,dx = [\quad]$$

$$\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2}$$

$$\left[\frac{(2)^3}{3} - 4\,(2)\right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} - 4\,(-2)\right]$$

$$\left[\frac{8}{3} - 8\right] - \left[-\frac{8}{3} + 8\right]$$

$$\frac{8}{3} - 8 + \frac{8}{3} - 8$$

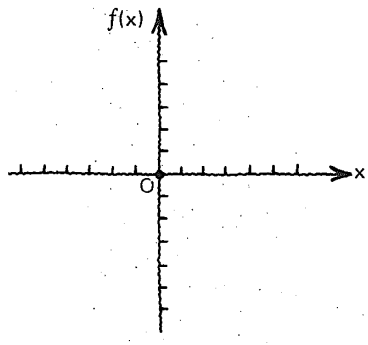
$$\frac{16}{3} - 16$$

$$-\frac{32}{3}$$

214

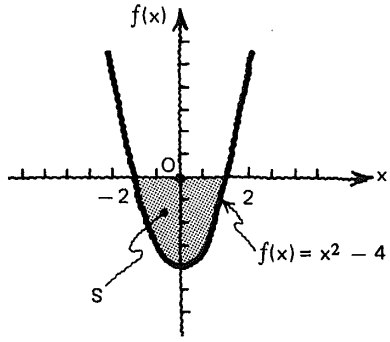
$$\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,dx = -\frac{32}{3}$$

Gráficamente:



Respuesta en el cuadro siguiente.

Aunque no nos es posible calcular en forma exacta el área S, por procedimientos geométricos, el resultado nos parece plausible.



215

$$\int_{-2}^{2} x^{-4}\,dx = ?$$

¿Es continua $f(x) = x^{-4}$ en $[-2, 2]$?

Sí adelante | **No** alto

- No → alto (presenta una discontinuidad en $x = 0$, puesto que

$$x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

y para $x = 0$

$\frac{1}{0^4}$ no está definido)

216

Sin embargo, vamos a seguir adelante, por mera curiosidad.

$$\int_{-2}^{2} x^{-4}\,dx = \boxed{\quad}$$

$$\left[-\frac{1}{3x^3}\right]_{-2}^{2}$$

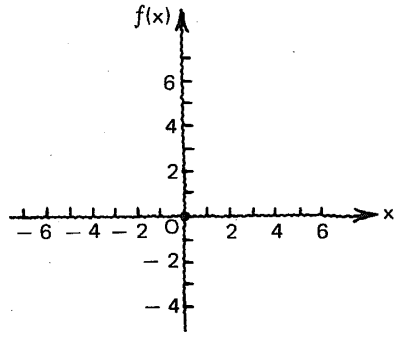
$$\left[-\frac{1}{3\,(2)^3}\right] - \left[-\frac{1}{3\,(-2)^3}\right]$$

$$-\frac{1}{24} - \frac{1}{24}$$

$$-\frac{1}{12}$$

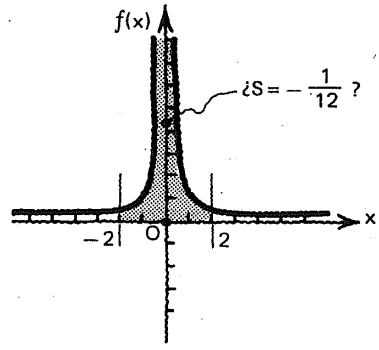
$$\int_{-2}^{2} x^{-4}\,dx = -\frac{1}{12}$$

Gráficamente:



Respuesta
en el
cuadro siguiente.

¿Es geométricamente plausible
el resultado obtenido?



8.2.6.1

Práctica adicional de evaluación
de integrales definidas
por medio de la expresión

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = G(b) - G(a)$$

verificando si f es continua en [a, b],
para funciones integrales
por las reglas estudiadas,
si se considera necesario.

8.2.6.

En este punto, el alumno debe ser capaz de:

- *evaluar* una integral definida, por medio de la expresión:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = G(b) - G(a)$$

verificando si f es continua en [a, b].
f es una función integrable por las reglas estudiadas.